ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE BUCUREŞTI

LIANA MANU-IOSIFESCU   SORIN BAZ   BOGDAN IFTIMIE

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

PENTRU ANUL I

Coordonator: CONSTANTIN RAISCHI

Editura ASE
Bucureşti
2000

ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE BUCUREŞTI

FACULTATEA DE CIBERNETICĂ, STATISTICĂ
ŞI INFORMATICĂ ECONOMICĂ
CATEDRA DE MATEMATICĂ

Lector.dr.
LIANA MANU-IOSIFESCU

Lector dr.
SORIN BAZ

Lector.dr.
BOGDAN IFTIMIE

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

PENTRU ANUL I

Coordonator: Conf.dr. CONSTANTIN RAISCHI

Editura ASE
Bucureşti
2000

ISBN 973 – 9462 – 55 – 3

Cuprins

1

ELEMENTE DE TEORIA MULŢIMILOR ŞI TOPOLOGIE

Autor: lector.dr. LIANA MANU-IOSIFECU

1 ELEMENTE DE TEORIA MULŢIMILOR ŞI TOPOLOGIE

A. Probleme rezolvate

1. Să se verifice care dintre următoarele relaţii în R^2 sunt relaţii de ordine:

a) $(x,y)\ \omega_1\ (x',y') \Leftrightarrow x \le x'$ şi $y \le y'$ (ordinea produs)

b) $(x,y)\ \omega_2\ (x',y') \Leftrightarrow x \le x'$ sau ($x = x'$ şi $y \le y'$) (ordinea lexicografică)

c) $(x,y)\ \omega_3\ (x',y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le x'^2 + y'^2$

d) $(x,y)\ \omega_4\ (x',y') \Leftrightarrow |x| + |y| \le |x'| + |y'|$

Care este ordine totală?

Care sunt ordinile ce le induc pe mulţimea

$A = \{(x,y) / y= 0\}$?

Soluţie

a) Fie $(x,y) \in R^2 \Rightarrow (x,y)\ \omega_1\ (x,y)$ deoarece $x \le x$, $y \le y$.

Deci $\forall\ (x,y) \in R^2$, $(x,y)\ \omega_1\ (x,y)$. Rezultă că relaţia ω_1 este *reflexivă*. În acelaşi mod se arată că relaţiile ω_2, ω_3, şi ω_4 sunt reflexive.

Fie (x,y), (x',y'), $(x'',y'') \in R^2$ şi $(x,y)\ \omega_1\ (x',y')$, $(x',y')\ \omega_1\ (x'',y'')$.

Rezultă $x \le x'$ şi $y \le y'$, $x' \le x''$ şi $y' \le y''$, deci $x \le x''$ şi $y \le y''$.

Astfel $(x,y)\ \omega_1\ (x'',y'')$. Deci $\forall\ (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in R^2$ a.î. $(x,y)\ \omega_1\ (x',y')$, $(x',y')\ \omega_1\ (x'',y'') \Rightarrow (x,y)\ \omega_1\ (x'',y'')$.

Rezultă că relaţia este *tranzitivă*. În acelaşi mod se arată că ω_2, ω_3, ω_4 sunt relaţii tranzitive.

Fie (x,y), (x',y'), $\in R^2$ a.î. $(x,y)\ \omega_1\ (x',y')$, $(x',y')\ \omega_1\ (x,y) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \le x'$, $y \le y'$ şi $x' \le x$, $y' \le y$. Deci $(x,y) = (x',y')$ şi relaţia ω_1 este *antisimetrică*. În concluzie, ω_1 este o relaţie de ordine pe R^2. În mod analog, se arată că relaţia ω_2 este relaţie de ordine pe R^2.

Relația ω_3 nu este antisimetrică, deoarece $\exists$ (x,y), (x',y') $\in R^2$, (x,y) ω_3 (x',y') şi (x',y') ω_3 (x,y) astfel încât (x,y) $\neq$ (x',y'). De exemplu: (x,y) = (1,0) şi (x',y') = (0,1).

Relația ω_1 determină pe R^2 o relație de ordine parțială.

Relația ω_2 este o relație de ordine totală pe R^2: $\forall$(x,y), (x',y')$\in R^2$, (x,y) ω_2 (x',y') sau (x',y') ω_2 (x,y). Într-adevăr, fie (x,y) şi (x',y') $\in R^2$. Avem x < x' sau x > x' sau x = x'.

În primele două cazuri este îndeplinită condiția, iar în ultimul caz, y $\leq$ y' sau y' $\leq$ y, deci (x,y) ω_2 (x',y') sau (x',y') ω_2 (x',y').

2. Fie X = {{1}, {1,2}, {2,3,4}, {5}} ordonată prin incluziune:

a) Să se determine elementele maximale şi elementele minimale.

b) Există un cel mai mare element?

Soluție

a) Se verifică imediat că {1,2}, {2,3,4} şi {5} sunt maximale, iar {1}, {2,3,4} şi {5} sunt minimale. Remarcăm că {2,3,4} şi {5} sunt şi elemente maximale şi elemente minimale în (X, $\subset$).

b) Dacă A $\subset$ X ar fi cel mai mare element al mulțimii X ordonată prin incluziune, atunci ar trebui să avem {1,2,3,4,5} $\subset$ A. Însă nici un element din X nu are această proprietate.

3. Fie M o mulțime arbitrară. Să se arate că:

a) ($\mathcal{P}$(M), $\subset$) este o structură de ordine parțială în care Φ este primul element (cel mai mic), iar M cel mai mare element. (Un element m $\in$M se numeşte primul element al mulțimii M dacă, oricare ar fi m' $\in$ M, avem m $\leq$ m').

b) Oricare ar fi $A_i \in \mathcal{P}$ (M), i $\in$ I, avem: $\sup\{Ai\}_{i\in I} = \bigcup_{i\in I} A_i$ şi $\inf\{Ai\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Soluție

a) Din proprietățile relației de incluziune și din $\Phi \subset A \subset M$ oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(M)$, rezultă i). Evident, relația de incluziune este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, nu orice două submulțimi aflându-se în relație de incluziune. Cel mai mic și cel mai mare element sunt elemente extremale.

b) Fie $B = \bigcup_{i \in I} A_i$. Din $Ai \subset B$ $\forall i \in I$, rezultă că B este un majorant al familiei $\{Ai\}$ în $(\mathcal{P}(M), \subset)$. Fie C un alt majorant, adică $A_i \subset C$, $i \in I$. De aici, rezultă că $B = \bigcup_{i \in A_i} A_i \subset C$, adică B este cel mai mic majorant. Deci $B = \sup\{Ai\}_{i \in I}$. Analog se arată cealaltă egalitate.

4. Fie $x \,\omega\, y \Leftrightarrow x \mid y$, relația de divizibilitate pe N^* ($x \mid y \Leftrightarrow \exists K \in N$, $x = ky$) și o submulțime a lui N^*, $X = \{3,5,15, 2,4,8,16,80,195\}$.

a) Să se arate că relația definită este o relație de ordine parțială pe N^*

b) Să se cerceteze existența elementului minim și a elementului maxim pentru mulțimea X.

c) Să se determine elementele minimale și maximale ale lui X, infX și supX și să se arate că X este inductiv ordonată.

Soluție

a) Fie $x \in N$. Cum $x \mid x$, relația este reflexivă. Antisimetria și tranzitivitatea se deduc ușor folosind definiția relației ω.

b) Luând pe rând elementele mulțimii X, cum $\forall x \in X$ $\exists y \in X$ a.î. $x \nmid y$, mulțimea nu are element minim (2 nu este minim, întrucât $2 \nmid 3$). În același mod se arată că X nu are element maxim.

c) Fie $x \in X$ cu $195 \mid x$. Rezultă $x = 195$, deci 195 este un element maximal. Similar 80 este un element maximal al mulțimii X. Mulțimea elementelor minimale este $\{2,3,5\}$.

Mulțimea minoranților mulțimi X este $\{1\}$, deci $\inf X = 1$, fiind cel mai mare minorant ($\inf X$ este cel mai mare divizor comun al elementelor mulțimii X). Mulțimea majoranților mulțimii X este mulțimea multiplilor comuni din X, $\{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13K \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, deci $\sup X = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, adică cel mai mic multiplu comun al elementelor mulțimii X. X este *inductiv ordonată:* orice parte a sa total ordonată are margine superioară, care este cel mai mare element din respectiva submulțime în sensul ordinii naturale. Acest element, ținând seama de condiția de ordonare totală, va fi divizibil cu orice alt element. Conform lemei lui Zorn, mulțimea X are cel puțin un element maximal (cardinalul mulțimii elementelor maximale este 2)

5. Studiați mărginirea următoarelor mulțimi de numere reale:

$A = (-\infty, 4)$

$B = [-1, 2)$

$C = \{ n^{(-1)^n} \mid n \in N\}$

Soluție

Mulțimea A este majorată deoarece există $b \in R$ astfel încât oricare $a \in A$, $a \le b$ (evident orice $b \ge 4$ satisface aceasta). Marginea superioară a mulțimii A este 4 (4 este majorant). Fie $\varepsilon > 0$. Luând $x_\varepsilon = 4 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, acesta satisface condiția $4 - \varepsilon \le x_\varepsilon \le 4$. Deci, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon \in A$ astfel încât $4 - \varepsilon \le x \le 4$. Prin urmare $\sup A = 4$. Mulțimea A nu este minorată și nu are margine inferioară finită, întrucât $\forall C \in R$, $\exists a_C \in A$ astfel încât $a_C < C$. Într-adevăr, fie $C \in R$. Există $a_C = C - 1 \in A = (-\infty, 4)$ și $a_C < C$. Avem $\inf A = -\infty$.

Mulțimea B este însă mărginită. Există $M = 3$ astfel încât $\forall x \in B$, $|x| \le 3$ deoarece $[-1,2) \subset [-3,3]$. Marginea inferioară a mulțimii B este -1, iar cea superioară este 2. Într-adevăr, -1 este minorant și, pentru $\varepsilon > 0$, există $x_\varepsilon = -1 + \frac{\varepsilon}{2} \in B$, cu $-1 \le x_\varepsilon \le -1 + \varepsilon$. Deci $\inf B = -1 \in B$, și analog $\sup B = 2$, dar $\sup B \notin B$.

Mulțimea C nu este mărginită, deoarece, $\forall M>0$, $\exists\ x_M \in C$ astfel încât $|x_M| > M$. Într-adevăr, fie $M > 0$; luăm $x_M = (2[M] + 2)^{(-1)^{2[M]+2}} = 2[M] + 2 \in C$.

Avem $|x_M| > M$ şi $\inf C = 0$, iar $\sup C = \infty$.

6. Fie Z mulțimea numerelor întregi şi m un număr întreg pozitiv. Fie pe Z relația ω definită prin $p\omega q \Leftrightarrow p \equiv q \pmod m$

a) Să se arată că ω este relație de echivalență pe Z
b) Să se determine clasele de echivalență
c) Să se afle numărul claselor de echivalență

Soluție

a) Fie $p \in Z$. Avem $p\omega p \Leftrightarrow p \equiv p \pmod m \Leftrightarrow m|p-p \Leftrightarrow m|0$, deci relația ω este *reflexivă*.

Fie $p, q \in Z$ şi $p\omega q \Leftrightarrow p \equiv q \pmod m \Rightarrow m|p-q \Rightarrow m|q-p \Rightarrow q \equiv p \pmod m \Rightarrow q\omega p$, deci relația ω este *simetrică*.

Fie $p,q,r \in Z$, $p \equiv q \pmod m$, $q \equiv r \pmod m \Rightarrow m|p-q$ şi $m|q-r \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in Z$ astfel încât $p-q = mk_1$ şi $q-r = mk_2$.

Prin urmare, $\exists k = k_1+k_2 \in Z$ astfel îcât $p - q = m(k_1+k_2) = mk_3 \Rightarrow m|p - r \Rightarrow p \equiv r \pmod m$, deci relația este *tranzitivă*. Rezultă că relația definită este o relație de echivalență.

b) Clasa de echivalență a lui $p \in Z$ este:

$\hat{p} = \{s|s \in Z, m|p-s\} = \{p+mk|k \in Z\} = mZ + p$

c) Rezultă că există m clase de echivalență

$\hat{0} = \{mk|k \in Z\}$, $\hat{1} = \{mk+1|k \in Z\}$; ..., $\hat{m} - \hat{1} = \{mk + m-1|K \in Z\}$. Mulțimea cât este: $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{m-1}\} = Z/\omega$.

Observație. Dacă m nu este prim, atunci clasele de echivalență ale congruenței modulo m vor fi în număr de $\varphi(m)$ (indicatorul lui Euler).

7. Fie pe R relația ω definită prin $x\omega y \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$.

a) Să se arate că ω este o relație de echivalență
b) Să se determine mulțimea cât, R/ω.

Soluţie

a) Fie $x\in R$; avem $\sin^2x + \cos^2y = 1 \Rightarrow x\ \omega\ x$, $\forall x\in R$, deci relaţia ω este *reflexivă*.

Fie $x,y\in R$; avem $x\omega y = \sin^2x + \cos^2y = 1 \Rightarrow$

$1-\cos^2x + 1-\sin^2y = 1 \Rightarrow \sin^2y + \cos^2x = 1$, adică $y\omega x$, deci relaţia ω este *simetrică*.

Fie $x,y,z\in R$ astfel încât $x\omega y$, $y\omega z \Leftrightarrow \sin^2x + \cos^2y = 1$, $\sin^2y + \cos^2z = 1$. Prin adunarea membru cu membru obţinem $\sin^2x + \cos^2y + \sin^2y + \cos^2z = 2 \Leftrightarrow \sin^2x + \cos^2z = 1 \Rightarrow x\omega z$, deci ω este *tranzitivă*. Aşadar, relaţia ω este o relaţie de *echivalenţă*.

b) Fie $x\in R$. Clasa de echivalenţă a lui x este:

$\hat{x} = \{y|y\omega x\} = \{y|\sin^2y + \cos^2x = 1\} = \{y|\sin^2y = \sin^2x\} = \{k\pi \pm x|k\in Z\}$.

Rezultă că $\forall x\in R$, $\exists y\in[0,\frac{\pi}{2}]$, astfel încât $y\omega x$.

Mulţimea cât este $R/\omega = \{\hat{x}\,|x\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$.

8. Fie $f: X \to Y$ o funcţie. Atunci avem:

a) f injectivă $\Leftrightarrow \forall A_1, A_2 \subseteq X$ cu $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ rezultă $A_1 \subseteq A_2$

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \subseteq Y$ cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ rezultă $B_1 \subseteq B_2$.

Soluţie

a) "$\Rightarrow$" Fie $A_1,A_2 \subseteq X$ fixate şi $f(A_1) \subset f(A_2)$. Atunci $\forall x_1\in A_1$ avem $f(A_1) \subset f(A_2)$, deci $\exists\ x_2\in A_2$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Cum f este injectivă, rezultă $x_1 = x_2$. Prin urmare $A_1 \subseteq A_2$.

"$\Leftarrow$" Fie $x_1,x_2\in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $f(\{x_1\}) \subseteq f(\{x_2\})$, deci $\{x_1\} \subseteq \{x_2\}$ şi deci $x_1 = x_2$, ceea ce înseamnă că f este injectivă.

b) "$\Rightarrow$" Fie $B_1,B_2 \subseteq Y$ fixate cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Atunci $\forall y_1 \in B_1$. $\exists x_1\in X$ cu $f(x_1) = y_1$.

Cum $f^{-1}(\{y_1\}) \subseteq f^{-1}(B_1)$, rezultă că $x_1 = f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ şi deci $y_1 = f(x_1)\in B_2$.

Prin urmare, $B_1 \subseteq B_2$.

"$\Leftarrow$" Fie $y \in Y$ fixat. Presupunem că $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Atunci $\forall y_1 \in f(X)$, avem $\emptyset = f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(\{y_1\})$,deci $\{y\} \subseteq \{y_1\}$, adică $y = y_1$. Rezultă $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, ceea ce este absurd.

Rezultă că, $\forall y \in X$, $\exists\, x \in X$ astfel încât $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{x\} \neq \emptyset$, adică f este surjectivă.

9. Fie $f,g: A \to A$ două funcţii. Atunci f,g sunt inversabile $\Leftrightarrow$ fog şi gof sunt inversabile.

Soluţie

"$\Rightarrow$" f,g inversabile $\Rightarrow$ f,g bijective, deci fog şi gof sunt bijective, deci inversabile.

"$\Leftarrow$" Dacă fog şi gof sunt inversabile, există două funcţii $h_1,h_2: A \to A$ astfel încât $(fog) \circ h_1 = h_1 \circ (fog) = 1_A$ şi $(gof) \circ h_2 = h_2 \circ (gof) = 1_A$, deci $fo(goh_1) = (h_1 of)\, og = 1_A$ şi $go(foh_2) = (h_2 og) of = = 1_A \Leftrightarrow fo(goh_1) = (h_2\, og)\, of = 1_A$ şi $go(foh_2) = (h_1 of)\, og = 1_A$, de unde rezultă că f şi g sunt inversabile.

10. O mulţime A este finită $\Leftrightarrow$ A nu este echivalentă cu nici o parte strictă a sa. Să se demonstreze că mulţimea numerelor naturale este infinită.

Soluţie

"$\Rightarrow$" Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi $B \subseteq A$ cu $B \sim A$. Dacă $B = \{b_1, b_2, \ldots b_k\}$, atunci $\{1,2,\ldots,n\} \sim \{1,2,\ldots,k\}$, deci $n \leq k$ şi $k \leq n$, adică $k=n$. Aceasta înseamnă că $B = A$.

"$\Leftarrow$" Presupunem prin absurd că A este infinită. Atunci construim inductiv o mulţime numărabilă $S \subseteq A$ astfel: $a_1 \in A$ fixat, $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$.

Fie $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Atunci $A\text{-}S \sim A \setminus S$ şi $S \sim S \setminus \{a_1\}$, deci $A \sim A \setminus \{a_1\}$, ceea ce contrazice ipoteza. Rămâne că A este finită.

Funcția f:N→N definită prin f(x) = 2n este o injecție nesurjectivă. Deci f(N) = 2N, N~f(N) $\subsetneq$ N, ceea ce arată că N nu este finită, fiind echipotentă cu o parte strictă a sa.

11. Fie A infinită. Să se arate că:

a) Există mulțimile B și C cu $\varnothing \subsetneq B$, $C \subsetneq A$. $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$. cardC = χ_0.

b) Oricare ar fi mulțimea X cu cardX $\leq \chi_0$ avem card($A \cup X$) = cardA.

Soluție

a) Fie $b_1, c_1 \in A$, apoi $b_2, c_2 \in A \setminus \{b_1, c_1\}$, $b_3, c_3 \in A \setminus \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$ ş.a.m.d.

Astfel obținem mulțimile numărabile $B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ și $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$.

Evident $B = A \setminus C \supset B'$, de unde $A = B \cup C$.

b) Fără a particulariza, putem admite că $X \cap A = \varnothing$. Cum $A = B \cup C$, unde C este numărabilă și $A \cup X = B \cup (C \cup X)$, unde $C \cup X$ este tot numărabilă, (ca reuniune a unei mulțimi numărabile cu o mulțime cel mult numărabilă), dacă:

i) X este numărabilă, rezultă $X \sim C \cup X$ și deci $A \sim B$. Prin urmare, $A \cup X \sim B \cup X \sim B \cup C = A$

ii) $Y \subset X$ și card $Y < \chi_0$, atunci card A $\leq$ card($A \cup Y$) $\leq$ card($A \cup X$) = card A, de unde card ($A \cup Y$) = card A.

Observație: Dacă mulțimea X este numărabilă, cu $A \cap X = \varnothing$, relația $A \cup X \sim A$ se mai poate scrie card A + χ_0 = cardA, adică χ_0 este element neutru față de operația de adunare a numerelor cardinale transfinite (numerele cardinale ale mulțimilor infinite).

12. Să se arate că reuniunea unei familii numărabile (disjuncte sau nu) de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Soluție

Fie $A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots$

disjunctă de mulțimi num

prin $f(a_i^j) = (i,j)$ este o bije

Într-adevăr, din $A_i \cap$

i = k și j = l, adică f este

Așadar, card ($\bigcup_n A_n$) = ca

Rămâne de arătat

Deoarece funcția f

injectivă, rezultă cardN×N

Pentru a demons

suficient să găsim o inj

$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ și (m,n) ≠

Dacă m+n = m'+n'

n = n', deci m = m', adi

ipotezei. Prin urmare, g(m

Dacă m+n ≠ m'+n',

g(m',n') ≥ $\frac{(m+n+}{}$

m + n + 1 + n' > $\frac{(m+n)(m}{2}$

Deci m+n < m'+n'

Prin urmare, funcția g

numește *numărare diago*

Astfel card(N×N) =

Dacă familia nu es

deoarece card($\bigcup_n A_n$) ≥ c

Observație: 1. Num

2. Ave

χ_0^n =

Soluție

Fie $A_n = \{a_0^n, a_1^n, \dots, a_n^n, \dots\}$, n = 1.2...., o familie numărabilă disjunctă de mulțimi numărabile. Funcția f: $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \to N\times N$, definită prin $f(a_i^j) = (i,j)$ este o bijecție.

Într-adevăr, din $A_i \cap A_j = \varnothing$ pentru $i \neq j$, dacă $a_i^j = a_k^l$, atunci $i = k$ și $j = l$, adică f este injectivă. Surjectivitatea este evidentă. Așadar, card $(\bigcup_n A_n)$ = card $(N\times N)$.

Rămâne de arătat că mulțimea $N\times N$ este numărabilă.

Deoarece funcția $f: N \to N\times N$ definită prin $f(n) = (n,0)$ este injectivă, rezultă $\text{card}N\times N \geq \text{card}N$.

Pentru a demonstra inegalitatea de sens contrar, este suficient să găsim o injecție $g: N\times N \to N$. Fie $g(m,n) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ și $(m,n) \neq (m', n')$.

Dacă $m+n = m'+n'$, atunci din $g(m,n) = g(m',n')$, ar rezulta $n = n'$, deci $m = m'$, adică $(m,n) = (m',n')$, ceea ce este contrar ipotezei. Prin urmare, $g(m,n) \neq g(m',n')$.

Dacă $m+n \neq m'+n'$, atunci $m'+n' \geq m+n+1$, de unde:

$$g(m',n') \geq \frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2} + n' = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} +$$

$$m + n + 1 + n' > \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n = g(m,n)$$

Deci $m+n < m'+n' \Rightarrow g(m,n) < g(m'+n') \Rightarrow g(m,n) \neq g(m',n')$. Prin urmare, funcția g definită mai sus (această funcție se numește *numărare diagonală*) este injectivă.

Astfel $\text{card}(N\times N) = \chi_0$, deci $\text{card}(\bigcup_n A_n) = \chi_0$.

Dacă familia nu este disjunctă, obținem $\text{card}(\bigcup_n A_n) \leq \chi_0$ și, deoarece $\text{card}(\bigcup_n A_n) \geq \text{card}A_n = \chi_0$, afirmația rămâne valabilă.

Observație: 1. Numărarea diagonală este surjecție

2. Avem și $n \cdot \chi_0 = \chi_0$ și similar (ex.22 propus) $\chi_0^n = \chi_0$.

13. Să se arate că mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Se numeşte *număr algebric* un număr real care este soluție a unei ecuații de gradul n, $P(x) = 0$, cu $P\in\mathbb{Z}[X]$

Soluție

Mulțimea ecuațiilor de grad n, $n\in N^*$, cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ este numărabilă întrucât mulțimea $\mathbb{Z}^n$ este cardinal echivalentă cu N. Deoarece fiecare ecuație de grad n are cel mult n rădăcini reale, rezultă că mulțimea S_n a soluțiilor reale ale acestor ecuații este numărabilă (reuniunea numărabilă de mulțimi finite este numărabilă). Mulțimea numerelor algebrice este $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Deoarece reuniunea numărabilă de mulțimi numărabile este numărabilă (vezi exercițiul 12) rezultă că A este numărabilă.

14. Arătați că mulțimea numerelor reale R nu este numărabilă.

Soluție

Procedeul diagonal al lui Cantor.

Presupunând că R este numărabilă, cum $R\sim[0,1]$, rezultă că $[0,1] = \{a_0,a_1,a_2,\ldots, a_n,\ldots\}$. Orice număr real subunitar pozitiv se poate scrie sub forma unei fracții zecimale $0,x_0x_1\ldots, x_n\ldots$, unde x_i sunt cifre cuprinse între 0 şi 9. Astfel, elementele din [0,1] se scriu:

$a_0 = 0,a_0^0a_1^0a_2^0\ldots a_n^0\ldots$

$a_1 = 0,a_0^1a_1^1a_2^1\ldots a_n^1\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_n = 0,a_0^na_1^na_2^n\ldots a_n^n\ldots$

Fie numărul real $b = 0,b_0b_1b_2\ldots b_n\ldots$ unde $b_i = \begin{cases} 2 \text{ dacă } a_i^i \neq 2 \\ 1 \text{ dacă } a_i^i = 2 \end{cases}$

Deoarece $b\in[0,1]$, rezultă că există n astfel încât $b = a_n$. Scrierea zecimală a lui b fiind unică, din $b = a_n$, rezultă că $b_n = a_n^n$, ceea ce contrazice definiția lui b.

15. Să se indice o b

Soluție

Întrucât $(0,1] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Big($

$f:(0,1] \to (0,1)$ ca f

injecția $f_k : \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right] \to \left(\frac{1}{2^k},\right.$

sau, $f: (0,1] \to (0,1)$

unde $A = (0,1)\setminus\Big\{$

$(0,1) = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}\cup A.$

16. Să se găseasc

mulțime cu trei elemente.

Soluție

Se pot defini 29

topologii distincte f(n) c

elemente este majorat de

Pentru $X = \{a,b,c\}$

$\tau_3 = \{\varnothing,\{b\},X\}$, $\tau_4 = \{\varnothing,\{$

$\tau_6 = \{\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\},X\}$,

$\tau_8 = \{\varnothing,\{a,b\},X\}$, $\tau_9 = \{\varnothing$

$\tau_{11} = \{\varnothing,\{a\},\{a,b\},X\}$, τ_1

$\tau_{13} = \{\varnothing,\{a\},\{a,c\},X\}$, τ_1

$\tau_{15} = \{\varnothing,\{b\},\{b,c\},X\}$, τ_1

$\tau_{17} = \{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},$

$\tau_{19} = \{\varnothing,\{c\},\{a,c\},\{b,c\},$

$\tau_{21} = \{\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a$

15. Să se indice o bijecţie între intervalele (0, 1] şi (0,1)

Soluţie

Întrucât $(0,1] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}\right]$ şi $(0,1) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}\right)$, definim

f:(0,1] → (0,1) ca funcţia a cărei restricţie la $\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}\right]$ este injecţia $f_k : \left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}\right] \to \left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}\right)$, definită prin $f_k(x) = \frac{3}{2^k}$-x,

sau, f: (0,1] →(0,1), $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \frac{1}{k+1}, & x = \frac{1}{k},\ k \in N \end{cases}$,

unde $A = (0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right\}$; deci, $(0,1] = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\} \cup A$ şi $(0,1) = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right\} \cup A$.

16. Să se găsească toate topologiile care pot fi definite pe o mulţime cu trei elemente.

Soluţie

Se pot defini 29 de topologii. În general, numărul de topologii distincte f(n) care se pot defini pe o mulţime cu n elemente este majorat de $2^{n(n-1)}$.

Pentru X = {a,b,c} τ_1 = {∅,X}, τ_2 = {∅,{a},X},
τ_3 = {∅,{b},X}, τ_4 = {∅,{c},X}, τ_5 = {∅,{a},{b},{a,b},X},
τ_6 = {∅,{a},{c},{a,c},X}, τ_7 = {∅,{b},{c},{b,c},X},
τ_8 = {∅,{a,b},X}, τ_9 = {∅,{b,c},X}, τ_{10} = {∅,{a,c},X},
τ_{11} = {∅,{a},{a,b},X}, τ_{12} = {∅,{b},{a,b},X},
τ_{13} = {∅,{a},{a,c},X}, τ_{14} = {∅,{c},{a,c},X},
τ_{15} = {∅,{b},{b,c},X}, τ_{16} = {∅,{c},{b,c},X},
τ_{17} = {∅,{a},{a,b},{a,c},X}, τ_{18} = {∅,{b},{b,c},{a,b},X},
τ_{19} = {∅,{c},{a,c},{b,c},X}, τ_{20} = {∅,{a},{b},{a,b},{a,c},X},
τ_{21} = {∅,{b},{c},{b,c},{a,b},X}, τ_{22} = {∅,{a},{c},{a,c},{b,c},X},

$\tau_{23} = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$, $\tau_{24} = \{\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,c\},X\}$,
$\tau_{25} = \{\varnothing,\{c\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},X\}$, $\tau_{26} = \{\varnothing,\{a\},\{b,c\},X\}$,
$\tau_{27} = \{\varnothing,\{b\},\{a,c\},X\}$, $\tau_{28} = \{\varnothing,\{c\},\{a,b\},X\}$,
$\tau_{29} = \{\mathcal{P}(x)\}$.

17. Fie τ familia de părţi ale lui R^2 formată din $\varnothing$ şi toate mulţimile cu proprietatea că, odată cu un punct, conţin un disc deschis cu centrul în acel punct (Se numeşte disc deschis cu centrul în punctul (a,b), de rază $r > 0$, mulţimea $D = \{(x,y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$. Să se arate că τ este o topologie pe R^2, spaţiul topologic (R^2, τ) fiind separat.

Soluţie

Vom arăta că axiomele topologiei sunt verificate.

i) Fie $A,B \in \tau$. Deoarece $\varnothing \in \tau$ prin construcţie, dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci $A \cap B \in \tau$. Dacă $A \cap B \neq \varnothing$, fie $(a,b) \in A \cap B$. Deoarece $A,B \in \tau$, există un disc deschis $D_1 \subset A$ cu centrul în (a,b) şi un disc deschis $D_2 \subset B$ cu centrul în (a,b). Cele două discuri fiind concentrice, rezultă că unul este inclus în celălalt. Fie $D_1 \subset D_2$.

Obţinem $D_1 \subset A \cap B$. Deci există un disc deschis cu centrul în (a,b) conţinut în $A \cap B$, de unde $A \cap B \in \tau$.

ii) Fie $A_i \in \tau$ $\forall i \in I$ şi $(a,b) \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Rezultă că există $k \in I$ pentru care $(a,b) \in A_k$, deci există un disc deschis $D \subset A_k$ cu centrul în (a,b). Dar $D \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, de unde $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

iii) $\varnothing \in \tau$ prin construcţie, iar $R^2 \in \tau$ deoarece orice disc deschis este conţinut în R^2.

Cum $\forall A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ şi $A \neq B$, $(\exists) D_A, D_B$ astfel încât $D_A \cap D_B \neq \varnothing$, (ambele discuri având, de exemplu, raze egale cu o treime din distanţa de la A la B), deci spaţiul topologic este separat.

18. Fie X o mulțime infinită. Să se arate că:

$\tau = \{X,\varnothing\}\cup\{G|CG$ finită$\}$ determină o topologie pe X (topologia cofinită). Să se arate că spațiul topologic (X, τ) este neseparat.

Soluție

Prin construcție, $X, \varnothing\in\tau$

Fie $G_1,G_2 \in\tau \setminus\{\varnothing\}$, $G_1\cap G_2 = C(CG_1\cup CG_2)$. Cum CG_1 și CG_2 sunt finite prin ipoteză și $CG_1\cup CG_2$ este finită. Rezultă $G_1\cap G_2\in\tau$. Pentru $G_1 = \varnothing$ sau $G_2 = \varnothing$, evident $G_1\cap G_2 = \varnothing\in\tau$.

Fie $G_i\in\tau$, $i\in I$ și $I' \subseteq \{i|i\in I, G_i \neq \varnothing\}$.

$\bigcup\limits_{i\in I} G_i = C\left(\bigcap\limits_{i\in I'} G_i\right)$. Mulțimile CG_i, $i\in I'$ sunt finite, deci și $\bigcap\limits_{i\in I'} G_i$ este finită. Rezultă $\bigcup\limits_{i\in I} G_i \in\tau$. Așadar, axiomele topologiei sunt verificate.

Presupunem că (X, τ) este separat. Fie $x,y\in X$, $x \neq y$. Prin urmare, există V_x, V_y vecinătăți ale lui x, respectiv y, astfel încât $V_x\cap V_y \neq \varnothing \Rightarrow \exists\ G_x,G_y\in\tau$, cu $x\in G_x\subset V_x$, $y\in G_y\subset V_y$, $G_x\cap G_y \neq \varnothing$. În plus $G_y \neq \varnothing$. Deci $G_x\subset CG_y$ și, cum CG_y este finită, deducem că și G_x este finită. Dar $X = G_x \cup CG_x$.

Cum $G_x\in\tau$, rezultă că CG_x este finită, deci X este finită, ceea ce contrazice ipoteza.

19. Pentru $E \subset R(\overline{R})$ se definesc mulțimile punctelor:

- interioare, $\overset{\circ}{E} = \{x\in R\ |\exists U\in V(x), U\subset E\}$
- exterioare, $\text{ext}E = \{x\in R|x\in \overset{\circ}{\widehat{CE}}\}$
- frontieră, $\text{fr}E = \{x\in R|\forall U\in V(x) \Rightarrow U\cap E\neq\varnothing, U\cap CE \neq\varnothing\}$
- aderente, $\overline{E} = \{x\in R|\ \forall U\in V(x) \Rightarrow U\cap E\neq\varnothing\}$
- de acumulare, $\overline{E}' = \{x\in R|\forall U\in V(x) \Rightarrow U\cap E\setminus\{x\}\neq\varnothing\}$
- izolate, $\text{Iz}E = \{x\in R|\ \exists U\in V(x), U\cap E = \{x\}\}$

Evident $\overset{\circ}{E}\subset E$, $\text{fr}E = \text{fr}CE$, $\overline{E} = E\cup E' = E\cup \text{fr}E = \overset{\circ}{E} \cup \text{fr}E$ și $\text{Iz}E = E\setminus E'$

Să se găsească $C\overset{\circ}{E}$, $C\text{ext}E$, $C\text{fr}E$, $C\overline{E}$, CE', $C\text{Iz}E$

Soluție

$x\in C\overset{\circ}{E} \Leftrightarrow x\in \overline{R},\ x\notin \overset{\circ}{E} \Leftrightarrow x \in \overline{R} \wedge \overline{x\in R,\ \exists U\in V(x),\ U\subset E} \Leftrightarrow$ $x\in \overline{R} \wedge (x\notin \overline{R} \vee \forall U,\ U\in V(x) \vee U\cap CE \neq\varnothing) \Leftrightarrow x\in R \wedge \forall U\in V(x) \Rightarrow$ $U\cap CE \neq\varnothing \Leftrightarrow x\in \overline{CE}$. Deci $C\overset{\circ}{E} = \overline{CE}$

Analog $C\text{ext}E = \overline{E}$, $C\text{fr}E = \overset{\circ}{E}\cup\text{ext}E$, $C\overline{E} = \text{ext}E$. $CE' = \text{ext}E\cup\text{Iz}E$ și $C\text{Iz}E = \text{ext}E\cup E'$

Observație. Din $C\text{fr}E = \overset{\circ}{E}\cup\text{ext}E$ rezultă că $\overline{R} = \overset{\circ}{E} \cup \text{ext}E\cup \text{fr}E$, deci cele trei mulțimi (disjuncte) realizează o partiție a spațiului (în cazul în care sunt nevide).

20. Să se arate că dacă $\text{fr}E = \varnothing$, atunci $E\in\{\overline{R}, \varnothing\}$

Soluție

Presupunem că există $x\in \overset{\circ}{E}$ și $y\in \text{ext}E$. Cum $x \neq y$, avem $x<y$ sau $y<x$. Să admitem că $x<y$.

Fie $z = \sup(\overset{\circ}{E}\cap[x,y]) \in[x,y]$. Deoarece $\overset{\circ}{E}$, $\text{ext}E$ sunt deschise, există intervalele $I_x\in B(x)$, $I_y\in B(y)$ astfel încât $x\in I_x \subset \overset{\circ}{E}$ și $y\in I_y\in CE$, de unde, ținând seama de proprietățile marginii superioare a unei mulțimi avem că $x < z < y$. Pe de altă parte, din $z\in \overset{\circ}{E} \cup \text{ext}E$, rezultă că $z\in \overset{\circ}{E}$ sau $z\in \text{ext}E$. Prin urmare, există un interval $I_z\in B(z)$ astfel încât $I_z\subset \overset{\circ}{E} \subset(x,y)$ sau $I_z \subset \text{ext}E \cap(x,y)$, ambele relații fiind în contradicție cu faptul că $z = \sup(\overset{\circ}{E}\cap(x,y)]$. Ipotezele $\overset{\circ}{E} \neq 0$ și $\text{ext}\,E\neq 0$ au condus deci la o contradicție. Așadar $\overset{\circ}{E} = 0$ sau $\text{ext}E = \varnothing$, adică $E\in\{\varnothing, \overline{R}\}$. Așadar $R(\overline{R})$ sunt conexe (nu pot fi descompuse într-o reuniune de două mulțimi deschise, nevide și disjuncte).

21. Fie $A\subset R$. Atunci $R = \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{\overline{CA}}\cup FrA$ $(CA = C_{\mathbb{R}}A)$

Soluție

Relația este echivalentă cu $R\setminus FrA = \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{\overline{CA}}$. Dar $x\in R\setminus FrA$ $\Leftrightarrow x\notin FrA = \overline{A}\cap\overline{CA} \Leftrightarrow x\notin\overline{A} \vee x\notin\overline{CA} \Leftrightarrow x\in C\overline{A} = \overset{\circ}{\overline{CA}} \vee$ $x\in C\overline{CA} = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow x\in\overset{\circ}{\overline{CA}}\cup\overset{\circ}{A}$.

Așadar, $R\setminus FrA = \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{\overline{CA}}$.

Observație. În același mod se arată că pentru $A\subset X$, X oarecare avem $X = \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{\overline{CA}}\cup FrA$ $(CA = C_xA)$.

22. Să se arate că dacă A este conexă atunci și $\overline{A}$ este conexă.

Soluție

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că $\overline{A}$ nu este conexă.

Deci există $B_1,B_2\neq\varnothing$ astfel încât $\overline{A} = B_1\cup B_2$, $\overline{B}_1\cap B_2 = \varnothing$, $B_1\cap\overline{B}_2 = \varnothing$.

Notăm cu $C_1 = A\cap B_1$ și $C_2 = A\cap B_2$. Avem $C_1\cup C_2 = (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2) = A\cap(B_1\cup B_2) = A\cap\overline{A} = \varnothing$, $\overline{C}_1\cap C_2 = (\overline{A\cap B_1})\cap(A\cap B_2)$ $\subset\overline{A}\cap\overline{B}_1\cap A\cap B_2 = \varnothing$ și $C_1\cap\overline{C}_2 = (A\cap B_1)\cap(\overline{A\cap B_2}) = \varnothing$. Cum $C_1\neq\varnothing$ $\neq C_2$, deoarece în caz contrar $C_1 = \varnothing \Rightarrow A\cap B_1 = \varnothing \Rightarrow A\cap B_2 = A \Rightarrow$ $A\subset B_2 \Rightarrow \overline{A}\subset\overline{B}_2 \Rightarrow \overline{A}_1\cap B_1\subset\overline{B}_2\cap B_1 = \varnothing$, rezultă $B_1 = \varnothing$, mulțimea A nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, $\overline{A}$ este conexă.

23. În topologia discretă (X, τ) să se arate că:

a) Orice mulțime $A\subset X$ are frontiera vidă.

b) $B = \{\{x\}\mid x\in X\}$ este o bază a spațiului topologic.

Soluție

a) Fie mulțimea $A \subset X$ şi un punct $x \in X$ cu $x \notin \overset{\circ}{\widehat{CA}}$ (care nu este punct exterior pentru A). Rezultă că CA nu este o vecinătate pentru x, deci $x \notin CA$, deoarece în topologia discretă $CA \in \tau$. Obținem $x \in A$ şi, cum $A \in \tau$, avem $x \in \overset{\circ}{A}$. Am arătat astfel că orice punct care nu este punct exterior pentru A este punct interior pentru A, deci $FrA = \varnothing$.

b) Să arătăm că orice element din τ se poate scrie ca o reuniune de elemente din B. Fie $A \in \tau$; avem $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$, deci B este o bază a spațiului topologic.

24. Fie X o mulțime cu cel puțin două elemente şi τ topologia grosieră. Să se arate că orice punct $x \in X$ este un punct de acumulare pentru orice mulțime a spațiului, în afară de $\varnothing$ şi de mulțimea $\{x\}$.

Soluție

Fie un punct $x \in X$ şi $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, $A \neq \{x\}$. Punctul x este punct de acumulare pentru A, dacă orice vecinătate a lui x are proprietatea $(V_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$.

Întrucât $\tau = \{\varnothing, X\}$, singura vecinătate a lui x este X deci $(X \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$, mulțimea A conținând cel puțin un element al lui X diferit de x. Rezultă $x \in A$.

25. Fie $X = \{a,b,c,d,e\}$ şi o topologie pe X
$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}\}$.

a) Să se găsească:

i) familia mulțimilor închise în (X, τ);
ii) inchiderile mulțimilor $\{a\}, \{b\}, \{a,c,e\}$;
iii) interiorul mulțimilor $\{b,c,e\}$, $\{a,b,c,e\}$;
iv) exteriorul şi frontiera mulțimii $\{b,c,e\}$

b) Să se arate că:

i) (X, τ) este un spaţiu topologic neseparat şi separabil;

ii) mulţimea $\{a,c\}$ este compactă, dar nu este închisă.

Soluţie

a) i) Familia mulţimilor închise în (X, τ) este familia complementarelor mulţimilor deschise: $\mathcal{F} = \{\varnothing, X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \{c,d\}\}$;

ii) Folosind faptul că $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F\in\mathcal{F}\\ A\subset F}} F$, obţinem:

$\{\bar{a}\} = X = \{\overline{a,c,e}\}$ şi $\{\bar{b}\} = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{b,c\}$;

iii) Folosind faptul că $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{G\in\tau\\ G\subset A}} G$, obţinem:

$\{\overset{\circ}{\overbrace{b,c,e}}\} = \varnothing$

$\{\overset{\circ}{\overbrace{a,b,c,e}}\} = \varnothing \cup \{a\} \cup \{a,b\} \cup \{a,b,e\} = \{a,b,c\}$

iv) $\text{Ext}\,\{b,c,e\} = \overset{\circ}{\overbrace{C\{b,c,e\}}} = \{\overset{\circ}{\overbrace{a,d}}\} = \varnothing \cup \{a\} = \{a\}$

$\text{Fr}\{b,c,e\} = C\overset{\circ}{A} \cap C\,\overset{\circ}{\overbrace{CA}} = C\varnothing \cap C\{a\} = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$

b) i) Fie $a,c \in X$, $\forall V_c$, $\{a,b,c\} \subset V_c \Rightarrow \{a\} \subset V_a \cap V_c$, deci oricare ar fi V_a, V_c vecinătăţi ale lui a şi c, $V_a \cap V_c \neq \varnothing$. Aşadar (X,τ) este separabil întrucât $\{\bar{a}\} = X$.

ii) Mulţimea $\{a,c\}$ este compactă, fiind o mulţime finită, dar nu este închisă deoarece $\{a,c\} \notin \mathcal{F}$. Dacă spaţiul topologic este separat, orice mulţime compactă este închisă (ceea ce nu este adevărat), deci (X, τ) este neseparat.

26. Arătaţi că:

a) A este deschisă dacă şi numai dacă $\text{fr}A = \overline{A} - A$

b) A este închisă dacă şi numai dacă $\text{fr}A = A - \overset{\circ}{A}$

c) A este închis-deschisă dacă şi numai dacă $A = \varnothing$.

Soluție

a) $A\in\tau \Rightarrow \overline{CA} = CA \Rightarrow frA = \overline{A} \cap \overline{CA} = \overline{A} \cap CA = \overline{A} - A$

$frA = \overline{A} - A \Rightarrow A\cap frA = \varnothing \Rightarrow \mathring{A} = A - frA = A \Rightarrow A$ este deschisă.

b) $A = \overline{A} \Rightarrow frA = \overline{A} \cap \overline{CA} = A\cap\overline{CA} = A\cap C\mathring{A} = A - \mathring{A}$

$frA = A - \mathring{A} \Rightarrow frA \subseteq A \Rightarrow \overline{A} = A\cup frA = A$

c) Dacă A este o mulțime închis-deschisă, atunci

$frA = \overline{A}\cap\overline{CA} = A\cap C\mathring{A} = A\cap CA = \varnothing$.

Dacă $frA = \varnothing$, atunci $\overline{A}\cap\overline{CA} = \varnothing \Rightarrow \overline{A}\cap C\mathring{A} = \varnothing \Rightarrow \overline{A} \subseteq \mathring{A}$

Dar $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A = \overline{A} = \mathring{A}$

27. Să se arate că $x\in E' \Leftrightarrow \forall U\in V(x) \Rightarrow card(U\cap E) \geq \chi_0$

Soluție

Este evident că dacă $card(U\cap E) \geq \chi_0$, $\forall U\in V(x) \Rightarrow x\in E'$.

Reciproc, dacă $x\in E'$ și ar exista $U\in V(x)$ astfel încât $card(U\cap E) < \chi_0$, atunci va exista printre punctele din $U\cap E$ unul care să fie cel mai apropiat de x. Fie acesta y. Prin urmare, luând $0 < \varepsilon < |x-y|$, în $W = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in V(x)$ nu va exista nici un punct din A, în afară, eventual, de x, ceea ce contrazice ipoteza că $x \in E'$.

28. Fie $Ep = \{\frac{1}{p}+\frac{1}{n};\ n\in N^*\}$, $p \in N^*$ și $E = \bigcup_{p=1}^{\infty} Ep$

i) Să se găsească Ep'

ii) Să se arate că E nu este închisă

iii) Să se demonstreze că $F = E\cup\{0\}$ este închisă

Soluție

Pentru p fixat, avem:

$Ep = \left\{\frac{1}{p}+1, \frac{1}{p}+\frac{1}{2}, \frac{1}{p}+\frac{1}{3}, \ldots\right\}$

În orice interval $\left(\frac{1}{p}\right.$ ...

suficient să luăm $x\in N^*$ ...

$\frac{1}{p}+\frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{p}-\varepsilon, \frac{1}{p}+\varepsilon\right)$. Deci: ...

nu este punct de acumulare ...

avem $\left|x-\frac{1}{p}\right| > \frac{1}{n}$. În concluzi...

ii) Oricare ar fi inter...

încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{n} < \varepsilon$, vom avea ...

$0, \frac{1}{p} \in E'$. Evident $0 \notin E$, dec...

iii) Cum $F' = \{\frac{1}{p}$, ...

$\frac{1}{p} \in E_{2p} \subset F$.

Deci $F' \subset F$, ceea ce ...

29. Fie $A = (0,1) \cap$ ...

în (0,1) și care acoperă pe ...

dea exemplu de șir $\Delta_n \subset (0$ ...

Soluție

Deoarece $\Delta = \mathring{\Delta}$, a...

rezultă că $fr\Delta \subset [0,1] \setminus \Delta$ și ...

Cum în U se află n...

Deci $x\in fr\Delta$, adică $[0,1] \setminus \Delta$...

egalitatea.

În orice interval $\left(\frac{1}{p}-\varepsilon,\frac{1}{p}+\varepsilon\right)$, există puncte din Ep; este suficient să luăm $x\in N^*$ astfel încât $\frac{1}{n}<\varepsilon$, căci atunci $\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\in\left(\frac{1}{p}-\varepsilon,\frac{1}{p}+\varepsilon\right)$. Deci: $\frac{1}{p}\in Ep'$. Dacă $x\in R$, $x\neq\frac{1}{p}$, atunci acesta nu este punct de acumulare al mulțimii Ep, deoarece, pentru $n>n_0$, avem $\left|x-\frac{1}{p}\right|>\frac{1}{n}$. În concluzie, $Ep'=\{\frac{1}{p}\}$.

ii) Oricare ar fi intervalul $(-\varepsilon,\varepsilon)$, luând numerele p,n astfel încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{n}<\varepsilon$, vom avea $\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Cum $\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\in Ep$, va rezulta $0,\ \frac{1}{p}\in E'$. Evident $0\notin E$, deci $E'\not\subset E$, adică E nu este închisă.

iii) Cum $F'=\{\frac{1}{p},\ p\in N^*\}\cup\{0\}=E'$, din $\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}\Rightarrow$ $\frac{1}{p}\in E_{2p}\subset F$.

Deci $F'\subset F$, ceea ce arată că F este închisă.

29. Fie $A=(0,1)\cap Q$, Δ_n un şir de mulțimi deschise incluse în (0,1) şi care acoperă pe A. Să se arate că $fr\Delta=[0,1]\setminus\Delta$. Să se dea exemplu de şir $\Delta_n\subset(0,1)$, $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n=\Delta$, cu $fr\Delta\neq\varnothing$.

Soluție

Deoarece $\Delta=\overset{o}{\Delta}$, avem că $fr\Delta\cap\Delta\neq\varnothing$ şi dim $fr\Delta\subset\overline{\Delta}\subset[0,1]$; rezultă că $fr\Delta\subset[0,1]\setminus\Delta$ şi $U\in V(x)$; evident $x\in U\cap C\Delta\neq\varnothing$.

Cum în U se află numere raționale şi $A\subset\Delta$, avem $U\cap\Delta\neq\varnothing$. Deci $x\in fr\Delta$, adică $[0,1]\setminus\Delta\subset fr\Delta$. Cele două incluziuni demonstrează egalitatea.

Dacă $A = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ şi considerăm ε_n suficient de mici, astfel încât intervalele $\Delta_x = (r_n - \varepsilon_n,\ r_n + \varepsilon_n)$ să fie incluse în $(0,1)$, atunci $A \subset \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \subset (0,1)$ şi $\{0,1\} \subset fr\Delta$.

30. Fie $A = (0,1) \cap Q$. Să se determine A', $\overline{A}$ şi frA.

Soluţie

$(\forall) x_0 \in [0,1]$ şi $\varepsilon > 0$, rezultă că $I := (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cap (0,1) \neq \varnothing$ sau $J := (x_0,\ x_0 + \varepsilon) \cap (0,1) \neq \varnothing$, deci $I \cap Q \neq \varnothing$ sau $J \cap Q \neq \varnothing$; urmează că $(A \cap (V_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, unde $V_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ încât $x_0 \in A' \Rightarrow [0,1] \subset A'$.

Reciproc, dacă $x_0 \in A'$ şi $x_0 \in [0,1]$ avem, de exemplu, $x_0 < 0$, deci $[0,1] \cap V_\varepsilon(x_0) = \varnothing$ pentru $0 < \varepsilon < |x_0|$. Rezultă că $A \cap V_\varepsilon(x_0) = \varnothing$, deci $x_0 \notin A'$, ceea ce este absurd.

Rămâne că $x_0 \in [0,1]$, deci $A' \subseteq [0,1]$. Prin urmare $A' = [0,1]$.

$\overline{A} = A \cup A' = ((0,1) \cap Q) \cup [0,1] = [0,1]$

Presupunem $\overset{0}{A} \neq \varnothing$ şi fie $x_0 \in \overset{0}{A}$, fixat. Atunci $(\exists) \varepsilon > 0$, cu $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \subset A \subset Q$ (1)

Cum intervalul deschis $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ conţine şi numere iraţionale, relaţia (1) este absurdă. Rămâne că $\overset{0}{A} = \varnothing$.

$frA = \overline{A} \cap \overline{CA} = \overline{A} \cap C\overset{0}{A} = \overline{A} \cap C\varnothing = \overline{A} \cap R = \varnothing$.

31. Fie $A \subseteq R$ o mulţime arbitrară şi $D \subseteq R$ o mulţime deschisă. Atunci:

i) $(A \setminus D)' \subseteq A' \setminus D$, $\overline{A \setminus D} \subseteq \overline{A} \setminus D$

ii) $\overline{A} \cap D \subseteq \overline{A \cap D}$, $A' \cap D \subseteq (A \cap D)'$

Soluţie

$(A \setminus D)' = (A \cap CD)' \subseteq A' \cap (CD)'$

Cum D este deschisă, rezultă că CD este închisă, deci $(CD)' \subseteq CD$; aşadar,

i) $(A \setminus D)' \subset A' \cap CD = A' \setminus D$. Similar $\overline{A \setminus D} \subseteq \overline{A} \setminus D$

deschis ⇒ x

ii) Fie $x \in \overline{A} \cap D$ fixat. Atunci $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ avem $D \cap V \in \mathcal{V}(x)$, deci, cum $x \in \overline{A}$, rezultă $A \cap (D \cap V) \neq \varnothing$ şi deci $(A \cap D) \cap V \neq \varnothing$. Prin urmare, $x \in \overline{A \cap D}$.

Observaţie: Dacă D nu este deschisă, relaţiile nu sunt adevărate.

i) $A = (0,1)$, $D = Q$

ii) $R \setminus Q = \overline{Q} \cap (R \setminus Q) \subseteq \overline{Q \cap (R \setminus Q)} = \varnothing$

32. Să se construiască un şir $(A_n)_{n \geq 1}$, , de mulţimi deschise (închise) din R, pentru care mulţimea $A^{*} = \bigcap_{n \in N} A_n$ ($\bigcup_{n \in N} A_n$) nu este deschisă (închisă).

Soluţie

Fie $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. Atunci A_n este deschisă $\forall$ $n \geq 1$ şi $A = \bigcap_{n \in N} A_n = \{0\}$, deci mulţimea A nu este deschisă.

Fie $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \geq 1$. Atunci A_n este închisă $\forall$ $n \geq 1$ şi $A = \bigcap_{n \in N} A_n = (0,1]$, deci mulţimea A nu este închisă.

33. Fie $A \subseteq R$ o mulţime deschisă (închisă). Atunci există un şir de mulţimi închise (deschise) $(A_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $A = \bigcup_{n \in N} A_n$ ($A = \bigcap_{n \in N} A_n$).

Soluţie

A fiind deschisă, $(\exists)(D_i)_{i \in I}$ o familie numărabilă de intervale deschise nevide cu $A = \bigcup_{i} D_i$. Însă, evident, fiecare D_i ($i \in I$) se poate scrie ca reuniune a unui şir $(J_n^i)_{n \geq 1}$ de intervale închise.

Cum reuniunea unui şir de mulţimi numărabile este numărabilă, funcţia $f: N \times N \to A$, definită prin $f(n,m) = a_m^n$, unde $\{a_1^n,$

$a_2^n, \ldots\}$ este o enumerare a mulțimii A, $\forall$ n $\geq$ 1 fiind bijecție, familia (J_n^i) $(n,i) \in N \times I$ este numărabilă.

Dacă A este închisă, avem $R \setminus A$ deschisă, deci $\exists (B_n)$ $n \geq 1$ un şir de mulțimi închise, cu $R \setminus A = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Punem $A_n = CB_n$ $(n \geq 1)$; atunci, fiecare $A_n (n \geq 1)$ este o mulțime deschisă şi avem: $A = C(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \bigcap_{n \geq 1} (CB_n) = \bigcap_{n \geq 1} A_n$.

34. În topologia obişnuită a dreptei reale se consideră mulțimea $A = (0,1] \cup \{3\}$. Să se determine $\overset{0}{A}, \overline{A}$, FrA, A' şi componentele conexe ale lui A.

Soluție

$\overset{0}{A} = (0,1)$, deoarece orice punct din (0,1) are ca vecinătate mulțimea (0,1), iar 1 şi 3 nu sunt puncte interioare, orice vecinătate a lor conținând puncte din CA.

$\overline{A} = [0,1] \cup \{3\}$, deoarece 0 este punct aderent al lui A, orice vecinătate a sa conținând puncte din A; evident, orice punct $x \notin [0,1] \cup \{3\}$ nu este punct aderent lui A.

$FrA = \overline{A} \cap \overline{CA} = \{0,1,3\}$.

A' = [0,1], deoarece 3 care este punct aderent al lui A, nu este punct de acumulare, există $V_3 = (2,4)$ astfel încât $(V_3 \setminus \{3\}) \cap A = \varnothing$.

Mulțimea A are două componente conexe $A_1 = (0,1]$ şi $A_2 = \{3\}$.

35. În topologia obişnuită a dreptei reale, să se dea exemple de mulțime:

a) închisă, pentru care există o acoperire cu deschise din care nu se poate extrage o acoperire finită;
b) nemărginită, pentru care există o acoperire cu deschise, din care nu se poate extrage o acoperire finită;
c) compactă, pentru care există o acoperire cu nedeschise, din care nu se poate extrage o acoperire finită.

Soluție

a) A = (-1,1) cu a

n∈N};

b) B = [0,∞) cu acc

c) C = [0,1] cu acc

36. În topologia ob

de o funcție continuă f: E

a) f nemărginită,
b) f(E) neînchisă
c) f mărginită, da
d) f nemărginită,
e) f(E) închisă şi

Soluție

a) Fie E = (0,1)

elementară şi nemărgi

este mărginită, dar nec

b) Fie E = (0,1)

elementară, iar mulțim

deschisă. Mulțimea f(E)

c) Fie E = (0,

deoarece ∀x∈E, |f(x)| <

sup f(x) = 1, deci f nu îşi
x∈E

d) E = [0, ∞), f(x

e) E = (0,1], f(x)

Soluție

a) A = (-1,1) cu acoperirea $\{I_n | I_n = (-1 + \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}), n \in N\}$;

b) B = $[0,\infty)$ cu acoperirea $\{I_n | I_n = (n-2, n), n \in N\}$;

c) C = [0,1] cu acoperirea $\{I_x | I_x = \{x\}, x \in C\}$.

36. În topologia obişnuită a dreptei reale să se dea exemplu de o funcție continuă f: $E \subset R \to R$, E necompactă astfel încât:

a) f nemărginită, E mărginită;
b) f(E) neînchisă şi mărginită;
c) f mărginită, dar nu îşi atinge marginile;
d) f nemărginită, E închisă;
e) f(E) închisă şi nemărginită.

Soluție

a) Fie E = (0,1) şi $f(x) = \frac{1}{x}$. Funcția f este continuă, fiind elementară şi nemărginită, deoarece $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Mulțimea E este mărginită, dar necompactă, fiind deschisă.

b) Fie E = (0,1) şi f(x) = x. Funcția f este continuă, fiind elementară, iar mulțimea E este mărginită, dar necompactă, fiind deschisă. Mulțimea f(E) = E = (0,1) este neînchisă.

c) Fie E = (0,1) şi f(x) = x. Funcția f este mărginită, deoarece $\forall x \in E$, $|f(x)| < 1$. Din f(E) = (0,1) rezultă că $\inf_{x \in E} f(x) = 0$ şi $\sup_{x \in E} f(x) = 1$, deci f nu îşi atinge marginile.

d) E = $[0, \infty)$, f(x) = x.

e) E = (0,1], $f(x) = \frac{1}{x}$.

B. Probleme propuse

1. Fie X o mulțime nevidă. Să se verifice că următoarele relații în $\mathcal{P}(X)$ (mulțimea părților acesteia) sunt relații de ordine și sunt echivalente.

1) $A\ \omega_1\ B \Leftrightarrow A \subset B$

2) $A\ \omega_2\ B \Leftrightarrow B = A \cup B$

3) $A\ \omega_3\ B \Leftrightarrow A = A \cap B$

4) $A\ \omega_4\ B \Leftrightarrow A = A \in \mathcal{P}(B)$

În ce condiții incluziunea induce o ordine totală pe mulțimea părților unei mulțimi.

Indicație

Card $X \geq 2 \Rightarrow \mathcal{P}(X)$ parțial ordonată ($\{a\} \not\subset \{b\}$ și $\{b\} \not\subset \{a\}$)

R. Cele 4 relații sunt reflexive proprii și tranzitive. Ordinea este totală dacă $X = \varnothing$ sau $X = \{a\}$.

2. O diviziune finită a intervalului $[a,b]$ este o mulțime $d = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$, astfel încât $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$, numărul natural n putând varia de la diviziune la diviziune. Norma diviziunii d este numărul $|d| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

Fie $D = \{d;\ d$ diviziune finită a intervalului $[a,b] \subset R\}$.

Să se verifice că următoarele relații sunt relații de ordine în D:

a) ordinea după normă $d\ \omega_1\ d' \Leftrightarrow |d| \leq |d'|$

b) ordinea după finețe $d\ \omega_2\ d' \Leftrightarrow d \subset d'$

Sunt acestea ordini totale? Coincid?

R. Relația ω_1 este o relație de ordine improprie, iar ω_2 este relație de ordine.

3. În mulțimea R considerăm relațiile:

a) $\{(x,y);\ a<x<y\}$, unde $a \in R$ este dat

b) $\{(x,y);\ a<x<b\}$, unde $a,b \in R$ sunt date

c) $\{(x,y);\ x<y\}$, ordinea uzuală

d) $\{(x,y);\ a<x<y<$

e) $\{(x,y);\ a<x\}$,

f) $\{(x,y);\ x \leq a \leq y\}$.

i) Să se arat
este ordine

ii) Să se fac
$A = (0,1]$ în

4. Fie, pe o mulț
$x = y$, $x,y \in X$. Să se arat

5. Să se arate că
mărginită.

R. Cel mai mic
cel mai mare un majora

6. Să se arate
elementele minimale î
numerele prime.

7. Fie: a) $a_n = 1+$

b) $a_n = \{$

Se cer: maxA, m

Indicație

Aflați limitele ext

8. Să se cercet
inferioare și superioa
reale:

$A = \{2n+1 \mid n \in N$

d) $\{(x,y);\ a<x<y<b\}$;

e) $\{(x,y);\ a<x\}$,

f) $\{(x,y);\ x\leq a\leq y\}$.

i) Să se arate că aceste relații sunt ordini în R. Care este ordine totală?

ii) Să se facă analiza structurii de ordine a mulțimii $A = (0,1]$ în raport cu fiecare dintre aceste ordini.

4. Fie, pe o mulțime oarecare X, ordinea trivială $x\ \omega\ y \Leftrightarrow x = y$, $x,y \in X$. Să se arate că orice element al lui X este maximal.

5. Să se arate că orice mulțime finită de numere reale este mărginită.

R. Cel mai mic element din mulțime este un minorant, iar cel mai mare un majorant al mulțimii.

6. Să se arate că în mulțimea numerelor naturale, $n>1$, elementele minimale în raport cu relația de divizibilitate sunt numerele prime.

7. Fie: a) $a_n = 1+\dfrac{n+1}{2n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}$, $n\in N$ $\qquad A = \{a_n \mid n\in N\}$

b) $a_n = \begin{cases} \dfrac{3n+2}{n}, & \text{dacă n par} \\ \dfrac{n+1}{3n+5}, & \text{dacă n impar} \end{cases}$ $\qquad$ și $A = \{a_n \mid n\in N^*\}$

Se cer: maxA, minA, supA, infA.

Indicație

Aflați limitele extreme ale acestor șiruri!

8. Să se cerceteze marginea și să se determine marginile inferioare și superioare pentru următoarele mulțimi de numere reale:

$A = \{2n+1 \mid n\in N\}$ $\qquad C = \{\sin\dfrac{n+1}{2},\ n\in N\}$

$B = \{ \frac{1}{n-3,4} | n \in N\}$ $\qquad$ $D = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2n,-2n+\frac{1}{2}\right)$

R. Mulțimile B și C sunt mărginite, iar A și D sunt mulțimi nemărginite.

9. Să se verifice dacă următoarele relații în mulțimea $\mathcal{F}[a,b] = \{f | f: [a,b] \to R$ arbitrară$\}$ sunt relații de ordine.

1) $f\ \omega_1\ g \Leftrightarrow f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a,b]$
2) $f\ \omega_2\ g \Leftrightarrow f(x_0) \le g(x_0),\ \forall x_0 \in [a,b]$
3) $f\ \omega_3\ g \Leftrightarrow$ f-g crescătoare
4) $f\ \omega_4\ g \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b |g(x)|dx$

10. Fie mulțimea $\mathcal{F}[0,1] = \{f;\ f:[0,1] \to R\}$ și următoarele relații în această mulțime:

1) $f\ \omega_1\ g \Leftrightarrow$ f-g mărginită
2) $f\ \omega_2\ g \Leftrightarrow$ f-g monotonă
3) $f\ \omega_3\ g \Leftrightarrow$ f-g continuă
4) $f\ \omega_4\ g \Leftrightarrow |f-g|$ mărginită
5) $f\ \omega_5\ g \Leftrightarrow |f-g|$ monotonă
6) $f\ \omega_6\ g \Leftrightarrow |f-g|$ continuă

Să se precizeze care dintre acestea este relație de echivalență.

11. Să se verifice că următoarele relații sunt relații de echivalență pe mulțimea șirurilor de numere reale:

1) $(x_n)\ \omega_1\ (y_n) \Leftrightarrow \exists A \subset N$ finită, $\forall n \in N - A$, $x_n = y_n$
2) $(x_n)\ \omega_2\ (y_n) \Leftrightarrow (x_n - y_n)$ este un șir constant
3) $(x_n)\ \omega_3\ (y_n) \Leftrightarrow (x_n - y_n)$ este un șir mărginit
4) $(x_n)\ \omega_4\ (y_n) \Leftrightarrow (x_n - y_n)$ este un șir convergent

12. Să se indice o bijecție între punctele unui cerc din care s-a exclus un punct și punctele unei drepte.

R. $M(x,0)$; $C: x^2 + y^2 = 1$; $C \cap AM = \{M'\}$; $A(0,1) \Rightarrow M'\left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

13. Fie o familie finită $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de mulțimi nevide, disjuncte două câte două. Să se arate că există o mulțime E care

are în comun cu fiecare A_i, $i = \overline{1,n}$ un singur element. (adică: axioma alegerii se poate demonstra pentru familii finite).

Indicație

Fiecare $a_i \in A_i$ şi $p_i(x)$: $x = a$;

$E = \{x | x \in \bigcup_{1}^{n} A_i,\ p_1(x) \vee p_2(x) \vee \ldots \vee p_n(x)\}$

14. Să se construiască două funcții $f:X \to Y$ şi $g:Y \to Z$ cu următoarele proprietăți:

a) f nesurjectivă, g surjectivă şi $g \circ f$ surjectivă;

b) f,g nebijective şi $g \circ f$ bijectivă

c) f sau g neinjectivă (respectiv nesurjectivă, nebijectivă) şi $g \circ f$ neinjectivă (respectiv, nesurjectivă, nebijectivă).

Exemplu: $f:R_+ \to R$, $f(x) = x$, $g:R \to R+$, $g(x) = x^2$, f,g nu sunt bijective, dar $g \circ f$ este bijectivă.

15. Fie A o mulțime finită cu cardA = n. Atunci:

a) mulțimea $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elemente;

b) ecuația $X \cup Y = A$ posedă 3^n soluții (X,Y);

R. a) Numărul submulțimilor lui A având k elemente este C_n^k

b) O soluție a ecuației are forma $Y = (A \setminus X) \cup P$, cu $P \in \mathcal{P}(X)$

16. Fie A şi B două mulțimi finite cu $card(A \cup B) = m$, $card(A \setminus B) = n$ şi $card\ (A \cap B) = p$.

a) Determinați cardA şi cardB;

b) Arătați că: b_1) $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

b_2) $card(A \cup B) = card(A \cap B) \Rightarrow cardA = cardB$

R. a) cardA = p+n; cardB = m-n.

17. Arătați că:

a) $A \subset X \Rightarrow cardA \leq cardX$

b) $\forall f,\ f:X \to Y \Rightarrow cardf(x) \leq cardX$

c) $\forall f,\ f:X \to Y$, f injectivă $\Rightarrow cardX \leq cardY$

d) $\forall f, f:X \to Y$, f surjectivă $\Rightarrow$ cardY $\leq$ cardX

18. Să se afle cardinalele următoarelor mulțimi:

$A = \{x \mid x \in R,\ x = \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1},\ n=1,2,3,\ldots,100\}$

$B = \{x \mid x \in R,\ x = \dfrac{an+b}{cn+d},\ n=1,2,\ldots,p\}$, $a,b,c,d \in R$, $cd > 0$.

$C = \{x \mid x \in R,\ x = -n^2+6n-7,\ n = 1,2,\ldots\}$

R. cardA = 99, cardB = $\begin{cases} 1, & \text{dacă } ad = bc \\ p, & \text{dacă } ad \neq bc \end{cases}$, cardC = 2

19. Să se arate că mulțimea $A = \{3n+2 \mid n \in N\}$ este numărabilă.

R. Funcția $f:N \to A$, $f(n) = 3n+2$ este bijectivă.

20. Să se arate că intervalele din tripletele următoare sunt cardinal echivalente, funcțiile indicate în triplete fiind bijecții între intervalele respective.

a) $[0,\infty)$, $[0,1)$ $\qquad f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

b) R, $(-1,1)$ $\qquad f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

c) $(0,\infty)$, R $\qquad f(x) = \ln x$

d) $[0,1]$, $[a,b]$ $\qquad f(x) = a + x(b-a)$

e) $(-1,1)$, R $\qquad f(x) = \mathrm{tg}\dfrac{2x}{\pi}$, $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

f) (a,b), $(0,\infty)$ $\qquad f(x) = \dfrac{a-x}{x-b}$

g) (a,b), (c,d) $\qquad f(x) = \dfrac{c-d}{a-b}x + \dfrac{ad-bc}{a-b}$ $\qquad \begin{matrix} a<b \\ c<d \end{matrix}$

21. Să se arate că dacă X și Y sunt două mulțimi numărabile, astfel încât $X \cap Y = \varnothing$, atunci $X \cup Y$ este o mulțime numărabilă.

Indicație

Fie $h: N \to X \cup Y$ $\quad h(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ par} \\ g\left(\frac{n+1}{2}\right), & n \text{ impar} \end{cases}$

$F: N \to X$, $g: N \to Y$ bijective.

22. Arătați că produsul cartezian a două mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Indicație

$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n \dots\}$, $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m \dots\}$, $A \times B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ unde $A_n = \{(a_n, b_0), (a_n, b_1), \dots, (a_n, b_m), \dots\}$ și se utilizează exercițiul rezolvat nr.12.

23. Să se arate că următoarele mulțimi sunt numărabile:

a) mulțimea Z a numerelor întregi;

b) mulțimea Q a numerelor raționale;

c) mulțimea P a numerelor prime;

d) mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali;

e) mulțimea perechilor de numere naturale.

Indicație Vom arăta că:

a) $f: Z \to N$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -1-2x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$,

sau $g: N \to Z$, $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ impar} \end{cases}$ este bijecție;

b) $Q = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $A_1 = Z$, $A_2 = \left\{\frac{n}{2} \mid n \in Z\right\}$, $A_m = \left\{\frac{n}{m} \mid n \in Z\right\}$

c) $\chi_0 \leq \text{card}P$ prin reducere la absurd

d) Inductiv că mulţimea polinoamelor de grad cel mult n este numărabilă. Orice element din A_{n+1} este de forma: $P(x)+a_{n+1}$, $P \in A_n$, $a_{n+1} \in Q$. Deci, fiecărui element din A_{n+1} i se poate pune în corespondenţă $(P(x), a_{n+1})$

e) $F: N \times N \to N$, $f(p,q) = p+\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)$ este o bijecţie.

24. Să se arate că orice mulţime de intervale disjuncte două câte două este numărabilă.

Indicaţie

Fiecărui interval (a,b) îi corespunde un număr raţional $\frac{[na]+1}{n}$, unde $n = \left[\frac{1}{b-a}\right]+1$.

25. Să se arate că următoarele mulţimi sunt nenumărabile (de puterea continuului):

a) orice interval mărginit [a,b), (a,b), [a,b];
b) mulţimea numerelor iraţionale;
c) mulţimea numerelor transcendente (complementară în R a mulţimii numerelor algebrice);
d) mulţimea şirurilor ai căror termeni parcurg o mulţime nenumărabilă.

Indicaţie Se foloseşte exerciţiul rezolvat nr. 11.

a) $A = (a,b)$, $X = \{a\}$, $[a,b) = A \cup X \sim A = (a,b) \Rightarrow \text{card}[a,b] = \text{card } R$
b) $R = I \cup Q \sim I \Rightarrow \text{card} I = \text{card} R$, $I = R \setminus Q$;
c) Analog, c sau: $f: I \to (0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in I-\alpha Q \\ 2x, & x \in \alpha Q,\ x \le \frac{\alpha}{2} \\ 2x-1, & x \in \alpha Q,\ \frac{\alpha}{2} < x \le \alpha \end{cases}$

este bijecţie unde $\alpha Q = \{\alpha r, r \in Q\}$;
d) se foloseşte procedeul diagonal al lui Cantor.

26. Fie X o mulţi[...]
$\tau = \{X, \varnothing, A, B\}$, unde A ş[...]
ale lui X. Ce condiţii treb[...]
fie o topologie pe X?

Indicaţie

A şi B determină [...]
ordonată în raport cu rel[...]

27. Să se găse[...]
mulţimi, pe mulţimea X [...]

28. Fie A o subm[...]
Arătaţi că $\tau = \{X, \varnothing, A\}$ e[...]

29. Fie N mulţim[...]
din $\varnothing$ şi din toate mulţi[...]
a) Să se verific[...]
b) Să se indi[...] numărul K; [...]
c) Să se găsea[...]
d) Determinaţi:
i) punct[...]
ii) interi[...] {2,4,[...]
iii) toate[...]

30. Fie X un sp[...]
a) interiorul [...] mulţimilor [...] mai mare [...]
b) aderenţa [...] mulţimilor [...] mulţime în[...]
c) $\overline{A} = A \cup A'$[...]

26. Fie X o mulțime care are cel puțin două elemente și $\tau = \{X, \varnothing, A, B\}$, unde A și B sunt două submulțimi proprii distincte ale lui X. Ce condiții trebuie să îndeplinească A și B pentru ca τ să fie o topologie pe X?

Indicație

A și B determină o partiție pe X sau τ este o mulțime total ordonată în raport cu relația de incluziune.

27. Să se găsească toate topologiile formate din patru mulțimi, pe mulțimea $X = \{a,b,c\}$.

28. Fie A o submulțime proprie a unei mulțimi oarecare, X. Arătați că $\tau = \{X, \varnothing, A\}$ este o topologie pe X.

29. Fie N mulțimea numerelor naturale și τ familia formată din $\varnothing$ și din toate mulțimile $E_n = \{n, n+1, \dots\}$, $n \in N$.

a) Să se verifice că τ este o topologie pe N;
b) Să se indice toate mulțimile deschise care conțin numărul K;
c) Să se găsească familia $\mathcal{F}$ a mulțimilor închise în (N, τ);
d) Determinați:
   i) punctele de acumulare ale mulțimii $\{2,8,13,50\}$;
   ii) interioarele și inchiderile mulțimilor $\{2,8,50\}$ și $\{2,4,6,\dots\}$;
   iii) toate mulțimile $E \subset N$, astfel încât $E' = N$

30. Fie X un spațiu topologic. Să se arate că:

a) interiorul unei mulțimi $A \subset X$ este reuniunea tuturor mulțimilor deschise care sunt inclusă în A (IntA este cea mai mare mulțime deschisă închisă în A);
b) aderența unei mulțimi $A \subset X$ este intersecția tuturor mulțimilor închise care includ A ($\overline{A}$ este cea mai mică mulțime închisă care include pe A);
c) $\overline{A} = A \cup A'$, oricare ar fi $A \subset X$.

31. Determinați:

a) familia mulțimilor închise;

b) un sistem fundamental de vecinătăți

în topologia cofinită (vezi exercițiul rezolvat nr. 18).

32. Fie (X, τ) un spațiu topologic și $\mathcal{F}$ familia mulțimilor incluse în (X, τ):

a) Să se arate că $\mathcal{F}$ verifică următoarele condiții:

(F_1) $X, \emptyset \in F$

(F_2) Dacă $F_1, F_2 \in F$, atunci $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

(F_3) Dacă $F_i \in \mathcal{F}$, pentru i aparținând unei familii oarecare de indici I, atunci $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$

O familie de submulțimi ale unei mulțimi X care verifică condițiile (F_1), (F_2) și (F_3) se numește cotopologie pe X.

b) Să se arate că dacă $\mathcal{F}$ este o cotopologie pe X, atunci există o topologie unică τ pe X pentru care $\mathcal{F}$ să fie clasa mulțimilor închise (există o bijecție între mulțimea cotopologiilor și mulțimea topologiilor pe o mulțime X);

c) Fie R mulțimea numerelor reale cu ordinea uzuală. Să se stabilească dacă clasa intervalelor închise este o cotopologie pe R.

d) Fie X o mulțime arbitrară și $\mathcal{F} = \{X, \emptyset, A\}$ o familie de submulțimi ale lui X, în care A este o submulțime proprie a lui X. Să se precizeze dacă F este o cotopologie pe X.

33. Fie R mulțimea numerelor reale și τ familia de părți ale lui R formată din $\emptyset$ și acele mulțimi $D \subset R$ pentru care $x \in D$ implică $-x \in D$:

a) Să se verifice că τ este o topologie pe R;

b) Să se arate că în această topologie o mulțime este închisă dacă și numai dacă este deschisă, dar τ este diferită de topologia discretă și de topologia grosieră pe R.

34. Să se determine $\overset{\circ}{E}$, ext E, frE, $\overline{E}$, E' și IzE în R, unde:

i) $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ iii) $E = \emptyset$

ii) $E = [1,2] \cup (3,4) \cup \{5\}$ iv) E

R. i) $\emptyset$, $\overline{R} \setminus E$, E, ...

$[-\infty,1) \cup (2,3) \cup (4$...

$[1,2] \cup (3,4)$, $\{5\}$; iii) Q...

$\overset{\circ}{E} = Q$, extE = $\overline{R} \setminus \{0,1,$...

$\overline{E}$ = frE, IzE = E.

35. Să se d...

intervalului:

a) $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$; b) A...

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Să se dea un e...

Indicație

b) $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists$ ...

$x \in \overset{\circ}{B}$

c) $x \in \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \Rightarrow \exists$...

d)A = (0,1]; B...

mulțimi;

$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_k A_n}} \subset \bigcap_k \overset{\circ}{A_k}$;

36. Să se ...

aderenței:

a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; b)...

d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap$...

37. Să se ...

frontierei:

a) frA = $\overline{A} \cap$...

c) $fr(A \cup B) \subseteq$...

R. i) $\varnothing$, $\bar{R}\setminus E$, E, E$\varnothing$,E; ii) $(1,2)\cup(3,4)$, $[-\infty,1)\cup(2,3)\cup(4,5)\cup(5,\infty)$, $\{1,2,3,4,5\}$, $[1,2]\cup[3,4]\cup\{5\}$, $[1,2]\cup(3,4)$, $\{5\}$; iii) Q = extQ = IzQ = $\varnothing$, $\bar{Q}$=Q' =frQ = $\bar{R}$; iv) $\mathring{E}$=Q, extE = $\bar{R}\setminus\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n}\dots\}$, frE = $\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$, E' = $\{0\}$, $\bar{E}$= frE, IzE = E.

35. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale intervalului:

a) $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$; b) $A\subset B \Rightarrow \mathring{A}\subset\mathring{B}$; c) $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$; d) $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}\supset \mathring{A}\cup\mathring{B}$.

Să se dea un exemplu în care incluziunea d) este strictă.

Indicație

b) $x\in\mathring{A} \Rightarrow \exists\ U\in\tau$, astfel încât, $x\in U\subset A \xrightarrow{A\subset B} X\in U\subset B \Rightarrow x\in\mathring{B}$

c) $x\in\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \Rightarrow \exists U\in\tau, U\subset A\cap B \Rightarrow U\subset A,\ U\subset B$

d) $A=(0,1]$; $B=[1,2]$, adevărată pentru familia oarecare de mulțimi;

$\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_k A_n}}\subset\bigcap_k\mathring{A}_k$; $A_k=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$.

36. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale aderenței:

a) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$; b) $A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$; c) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$;

d) $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$; e) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n\subset\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}$, $A_n=\left[\frac{1}{n},1\right]$, $n\in N^*$

37. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale frontierei:

a) frA = $\bar{A}\cap C\bar{A}$; b) frA = $\bar{A}\setminus\mathring{A}$ = IzA $\cup$(A' $\setminus\mathring{A}$);

c) fr(A$\cup$B) $\subseteq$ frA $\cup$frB; d) frfrA = frA $\setminus\overset{\circ}{\widehat{frA}}$; e) $\overline{frA}$ = frA;

f) $fr(A\cap B) \subseteq frA \cup frB$,
$A = Q\cup[0,1]\cup[3,4]$, $B = [2,3]$
g) $\mathring{A} = A - frA$; $fr\,\mathring{A} \subseteq frA$; h) $\overline{A} = A\cup frA$, $fr\overline{A} \subseteq frA$.

38. Să se demonstreze că derivata unei mulțimi are proprietățile:
a) $A\subset B \Rightarrow A' \subset B'$; b) $(A')' \subset A'$; c) $(A\cup B)' = A' \cup B'$;
d) $(A\cap B)' \subset A' \cap B'$
Observație. Pentru familii infinite de mulțimi are loc doar:
c') $\left(\bigcup_k A_k\right)' \supset \bigcup_k A_k'$, $A_k = \left\{\frac{1}{k}\right\}$

39. Fie mulțimea $A\subset R$. Să se arate că:
a) dacă $cardA \le \chi_0$, atunci $(CA)' = \overline{R}$;
b) dacă $cardA = \chi_0$ și A este închisă, atunci $IzA \neq \emptyset$

40. Să se demonstreze că următoarele propoziții sunt echivalente: (P_1) $\mathcal{F}\in\mathcal{F}$; (P_2) $F = \overline{F}$; (P_3) $F\supset F'$; (P_4) $F\supset frF$

41. Fie $X = \{a,b,c,d\}$ o mulțime formată din patru elemente:
a) Arătați că $\tau = \{X,\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ este o topologie pe X;
b) Să se găsească clasa mulțimilor închise în spațiul topologic (X, τ);
c) Să se găsească sistemele de vecinătăți ale punctelor b și d în spațiul topologic (X, τ).

42. Fie (X, τ) un spațiu topologic cu bază numărabilă și $\mathcal{G}$ o familie de deschise dispuncte două câte două. Să se arate că $\mathcal{G}$ este numărabilă.

Indicație

$f: \mathcal{G} \to N$, $f(G) = \min\{n | B_n \subset G\}$, $G\in \mathcal{G}$ este o funcție bijectivă $\Rightarrow B = \{B_n | n\in N\}$ baza numărabilă.

43. Fie X un
a) Să se ara
b) Să se ara
Indicație a)
b) Se arată
deschisă Δ_x care îl

44. Dreapta
(orice pereche de p

Indicație

$x \neq y$, $0 < r <$
$U \cap V = \emptyset$

43. Fie X un spațiu topologic şi A,B două submulțimi ale lui X:

a) Să se arate că dacă $A \cup B = X$, atunci $\overline{A} \cup \mathring{B} = X$

b) Să se arate că dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci $\overline{A} \cap \mathring{B} = \varnothing$

Indicație a) Se arată că $x \notin \overline{A}$ implică $x \in \mathring{B}$;

b) Se arată că dacă $x \in \overline{A}$, atunci pentru orice mulțime deschisă Δ_x care îl conține pe x, avem $\Delta_x \not\subset B$.

44. Dreapta reală este spațiu topologic separat (Hausdorff): (orice pereche de puncte distincte au vecinătăți disjuncte).

Indicație

$x \neq y$, $0 < r < \dfrac{|x-y|}{2}$, $U = (x-r, x+r)$, $V = (y-r, y+r)$,

$U \cap V = \varnothing$

2

COMPLEMENTE DE TEORIA ŞIRURILOR ŞI SERIILOR NUMERICE

Autor: lector.dr. LIANA MANU-IOSIFECU

2 COMPLEMENTE DE TEORIA ŞIRURILOR ŞI A SERIILOR NUMERICE

A. Probleme rezolvate

1. Să se verifice că şirul cu termenul general $x_n = \frac{n^2+1}{4n^2-1}$ are limita $\frac{1}{4}$. Să se determine rangul începând de la care toţi termenii şirului diferă de $\frac{1}{4}$ cu mai puţin de $\frac{1}{1000}$.

Soluţie

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Inegalitatea $\left|\frac{n^2+1}{4n^2-1}-\frac{1}{4}\right| < \varepsilon$ este satisfăcută dacă $n> \frac{1}{4}\sqrt{4+\frac{5}{\varepsilon}}$. Luând $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4}\sqrt{4+\frac{5}{\varepsilon}}\right]+1$, rezultă că dacă $n\geq N(\varepsilon)$, $\left|x_n-\frac{1}{4}\right| < \varepsilon$.

Pentru $\varepsilon = 10^{-3}$ se obţine $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4}\sqrt{5004}\right]+1 = 18$, deci termenii al căror rang este cel puţin 18 diferă de $\frac{1}{4}$ cu mai puţin de $\frac{1}{1000}$.

2. Să se calculeze a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$.

Soluție

Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n} = \infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$

a) Într-adevăr

$\frac{n!}{2^n} = \frac{1\cdot 2\ldots n}{2\cdot 2\ldots 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdots\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$, deci oricare ar fi a>0, există un rang N(a) astfel încât pentru orice $n \geq N(a)$ să avem $a_n > a$, adică $\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} > a \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n} > \frac{9a}{2} \Rightarrow n\log\frac{3}{2} > \log\frac{9a}{2} \Rightarrow$

$n > \frac{\log 9a - \log 2}{\log 3 - \log 2} \Rightarrow$ $N(a) = \left[\frac{\log 9a - \log 2}{\log 3 - \log 2}\right] + 1$

b) $\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + 1} <$

$< \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$, cu $N(\varepsilon) = \left[\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$

3. Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

b) $y_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$

Soluție

Vom arăta că șirurile sunt fundamentale (y_n pentru $|q|<1$), demonstrând că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$, astfel încât pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ și orice $p \in \mathbb{N}$ să avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

a) $|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)\right| =$

$= \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$.

Folosind majorarea $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, obținem

$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \ldots$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}\ldots$

este strict crescător, ...

b) Procedând analog...

$\leq |q|^{n+1}(|a_{n+1}| + |a_{n+2}||q\ldots$

$|q|^{p-1}) = \sup\{|a_n|\}|q|^{n+1}\ldots$

Prin urmare, pentru ...

$n \geq N(\varepsilon)$ să avem $\frac{\sup\{\ldots}{1-\ldots}$

$p \in \mathbb{N}$ și $n \geq N(\varepsilon)$.

4. Fie $x_n = (1\ldots$

$(x_n)_n$ și $(s_n)_n$ sunt co...

număr irațional.

Soluție

Aplicând formu...

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\ldots$

$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$

Cum $0 < 1 - \frac{k}{n} \leq \ldots$

întrucât: $x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\ldots$

arătat mai sus că $x_n\ldots$

m>n, avem:

$|x_{n+p}-x_n| < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$ pentru $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Deci $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$; şirul este strict crescător, mărginit superior de 2.

b) Procedând analog $|x_{n+p}-x_n| = |a_{n+1}||q|^{n+1} +\ldots+ |a_{n+p}||q^{n+p}| \leq$ $\leq |q|^{n+1}(|a_{n+1}| + |a_{n+2}||q| +\ldots+ |a_{n+p}||q|^{p-1}) \leq \sup\{|a_n|\}|q|^{n+1}(1+|q| +\ldots+ |q|^{p-1}) = \sup\{|a_n|\}|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|} < \frac{\sup\{|a_n|\}}{1-|q|}|q|^{n+1}$.

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon>0$, există $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru $n\geq N(\varepsilon)$ să avem $\frac{\sup\{|a_n|\}}{1-|q|}|q|^{n+1}<\varepsilon$, de unde $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ pentru orice $p\in\mathbb{N}$ şi $n \geq N(\varepsilon)$.

4. Fie $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi $s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Să se arate că $(x_n)_n$ şi $(s_n)_n$ sunt convergente şi au aceeaşi limită, care este un număr iraţional.

Soluţie

Aplicând formula binomului lui Newton, rezultă:

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$ $+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$

Cum $0<1-\frac{k}{n}\leq 1$, $k\in N$, şirul $(x_n)_n$ este crescător şi mărginit, întrucât: $x_n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leq 3$, deci convergent la $e\in R$. Am arătat mai sus că $x_n \leq s_n$. Pe de altă parte, fixând $n\in N$ şi luând $m>n$, avem:

$X_m = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)+\ldots>$

$>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$, de unde:

$e = \lim_{m\to\infty} x_m \ge \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\right)= s_m$,

deci $x_n \le s_n \le e$, adică $\lim_{m\to\infty} s_m = e$.

Pentru a arăta că e este irațional (transcendent: nu există $P\in Q[x]$ astfel încât $P(x) = 0$). Fie $m > n$. Atunci,

$$0 < s_m - s_n = \frac{1}{(n+1)!}+\ldots+\frac{1}{m!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots m}\right) \le \frac{1}{n!}\,\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n}$$

Trecând la limita în raport cu m, se deduce că:

$0 < e - s_n \le \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n}$ (1). Să presupunem că e este număr rațional, $\frac{p}{q}$ unde $p, q\in N^*$. Cum $x_n\in(2,3)$, avem $e\in(2,3)$ și deci $q>1$. În caz contrar, $e = p \in N$. Din (1), pentru $n = q$, se obține $0<\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \le \frac{1}{q!q}$, de unde $0< p(q-1)! -\left(q! +\frac{q}{1!}+\ldots+\frac{q}{q!}\right) \le \frac{1}{q} < 1$, ceea ce este o contradicție căci în membrul stâng avem un număr întreg.

5. Determinați limitele extreme ale șirurilor

a) $x_n = \begin{cases} a^n, & \text{dacă } n = 2k \\ b^n, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$; b) Q (șirul numerelor raționale)

Soluție

a) Dacă 0<a<b<1, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

Dacă a = 1<b, atunci $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \infty$

Dacă a < b=1, atunci $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$

Dacă 1 < a<b, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) L(Q) = $\overline{R}$, căci oricare ar fi x∈$\overline{R}$, orice vecinătate a sa conține o infinitate de puncte raționale. Deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} Q = \infty$ și $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} Q = -\infty$. Mulțimea punctelor limită ale unui șir poate fi infinită și chiar să conțină strict mulțimea termenilor săi.

6. a) Orice șir convergent în R este mărginit.

b) Un șir de numere reale este mărginit dacă și numai dacă mulțimea punctelor limită este mărginită.

Soluție

a) Dacă x = $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, atunci există N(ε)∈N astfel încât pentru n ≥ N(ε) avem x-ε < x_n < x +ε (2) de unde, pentru orice n∈N avem: $|x_n| \le \sup\{|x_1|\ldots|x_{N(\varepsilon)-1}|, \varepsilon+x\}$. Deci mulțimea $\{|x_n|\}$ este mărginită superior.

Observație. Dacă x ≠ 0, atunci $x \cdot x_n > 0$ pentru n ≥ N(ε), (adică termenii șirului sunt numere de același semn cu limita începând de la un anumit rang). Într-adevăr, luând ε >0 astfel încât x-ε >0, dacă x>0, respectiv x+ε <0, dacă x<0, din inegalitatea (2) rezultă imediat afirmația.

b) "⇒" Cum $(x_n)_n$ este mărginit, există M∈R_+^* astfel încât $|x_n| \le M$ ∀ n∈N, deci dacă există un subșir $x_{k_n} \to x$, rezultă $|x_{k_n}| \le$ M. Prin urmare L(x_n) este mărginită.

Cum $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ = minL(x_n) ≤ maxL(x_n) = $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, pentru orice ε >0 arbitrar, fixat, există un rang N(ε)∈N astfel încât pentru orice n∈N,

$n \ge N(\varepsilon)$ să avem $-M-\varepsilon \le x_n \le M+\varepsilon$, adică $\min\{x_0,x_1,.., x_{N(\varepsilon)}, -M-\varepsilon\} \le x_n \le \max\{x_0,x_1,.., x_{N(\varepsilon)}, M+\varepsilon\}$ deci $\{x_n\}_n$ este mărginit.

7. Să se demonstreze egalitatea:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_{n\in N} \sup\{x_{n+1}, x_{n+2},\dots\}.$$

Soluție

Notăm $L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, $L_n = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2},\dots\}$ şi $L_0 = \inf_{n\in N}\{L_n\}$.

Dacă $L = \infty$, cum $L\in L(x_n)$, există $x_{k_n} \to\infty$. Deci, pentru orice $n\in N$ avem $L_n = \infty$, de unde $L_0 = L = \infty$.

Dacă $L < \infty$, atunci pentru orice $\varepsilon >0$ se poate găsi $N(\varepsilon)\in N$ astfel încât din $n \ge N(\varepsilon)$ să rezulte $x_n \le L+\varepsilon$. Dar $\varepsilon >0$ fiind arbitrar, se obține inegalitatea $L_0 \le L$. Pe de altă parte, oricare ar fi $N(\varepsilon)\in N$ fixat, pentru $n \ge N(\varepsilon)$ avem $x_n \le L_{N(\varepsilon)}$, de unde rezultă $L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le L_{N(\varepsilon)}$ şi deci $L \le \inf\{L_n\} = L_0$. Aşadar $L = L_0$.

8. Să se demonstreze inegalitățile:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n},\ x_n>0$$

Soluție

Vom demonstra inegalitatea:

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Fie $a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Dacă $a = \infty$, inegalitatea este evidentă. Dacă $a < \infty$, pentru orice $\varepsilon >0$, există cel mult un număr finit de termeni mai mari decât $a+\varepsilon$, deci există $n'\in N$ astfel încât, dacă $n \ge n'$, să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} < a+\varepsilon$. De aici se obține $x_{n'+k+1} < (a+\varepsilon)x_{n'+k}$, pentru orice $k\in N$ şi atunci pentru orice $p\in N$, vom avea $x_{n'+p} \le (a+\varepsilon)^p x_{n'}$. Prin urmare $x_n \le (a+\varepsilon)^{n-n'}x_n$, oricare ar fi $n \ge n'$. Rezultă: $\sqrt[n]{x_n} \le \sqrt[n]{x_{n'}(a+\varepsilon)^{-n'}}(a+\varepsilon)$, de unde $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} < a+\varepsilon$. Cum $\varepsilon >0$ este arbitrar, se obține: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} = a$.

Observație. Din

dacă există l = $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

este egală cu l.

9. Fie $(x_n)_n$ un ş

$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Să se arate

$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_n$ este conv

Cesaro).

Soluție

Dacă $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)$

$N(\varepsilon) = n' \in N$ astfel înc

de unde $(y_n)_n$ fiind stric

$x_n < (x+\frac{\varepsilon}{3})(y_{n+1}-y_n)$.

Scriind aceste

însumând, obținem: (

relație pe care împărți

$(x-\frac{\varepsilon}{3})\left(1-\frac{y_{n'}}{y_n}\right)+$

Cum n' este fix

Astfel, $x-\varepsilon <$

rezultă că: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \overline{\lim}$

Observație. Din șirul de inegalități de mai sus, rezultă că dacă există $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, finită sau infinită, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ există și este egală cu l.

9. Fie $(x_n)_n$ un șir arbitrar și $(y_n)_n$ un șir strict crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Să se arate că: dacă $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)_n$ este convergent, atunci $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_n$ este convergent și are aceeași limită. (teorema Stolz-Cesaro).

Soluție

Dacă $\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)_n \to x\in R$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, va exista $N(\varepsilon) = n' \in N$ astfel încât dacă $n \geq n'$, atunci $x - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < x + \frac{\varepsilon}{3}$, de unde $(y_n)_n$ fiind strict crescător, obținem $(x-\frac{\varepsilon}{3})(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (x+\frac{\varepsilon}{3})(y_{n+1} - y_n)$.

Scriind aceste inegalități pentru n', $n'+1, \ldots n$ și apoi însumând, obținem: $(x-\frac{\varepsilon}{3})(y_n - y_{n'}) < x_n - x_{n'} < (x+\frac{\varepsilon}{3})(y_n - y_{n'})$, relație pe care împărțind-o la $y_n > 0$, vom obține:

$$(x-\frac{\varepsilon}{3})\left(1-\frac{y_{n'}}{y_n}\right)+\frac{x_{n'}}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<(x+\frac{\varepsilon}{3})\left(1+\frac{y_{n'}}{y_n}\right)+\frac{x_{n'}}{y_n}.$$

Cum n' este fixat, din $y_n \to \infty$, rezultă că $\frac{y_{n'}}{y_n}$ și $\frac{x_{n'}}{x_n} \to 0$.

Astfel, $x-\varepsilon < \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} < x+\varepsilon$. Cum ε este arbitrar, rezultă că: $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = x$.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\infty$. Atunci, pentru orice M>0 va exista n'∈N astfel ca din n ≥n' să rezulte $x_{n+1}-x_n > M(y_{n+1}-y_n)$. Făcând însumarea ca mai sus, vom obține: $x_n - x_{n'} > M(y_n - y_{n'})$ sau $\frac{x_n}{y_n} > \frac{x_{n'}}{y_n} + M\left(1-\frac{y_{n'}}{y_n}\right)$ ceea ce dovedește că: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} \ge M$.

Cum M>0 este arbitrar, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$. Cazul limitei $-\infty$ se tratează analog.

Observație. Reciprocele teoremei sunt false.

1. Dacă $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sunt șiruri de numere reale pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul $(y_n)_n$ nu este neapărat crescător strict și nemărginit ($x_n = y_n = (-1)^n$).

2. Dacă $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sunt șiruri de numere reale, $0<y_1<\ldots<y_n\ldots$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = x$, doar dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{y_{n+1}} = u\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$.

Într-adevăr, dacă $x_n = (-1)^n$, iar $y_n = n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$, dar nu există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$. Cum $\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\left(1-\frac{y_{n-1}}{y_n}\right) + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\cdot\frac{y_{n-1}}{y_n}$, trecând la limită după n, obținem:

$$(1-u)x = (1-u)\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

10. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un șir de numere pozitive. Atunci $l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right) \ge 1$.

Soluție

Presupunem prin absurd că $l < 1$. Atunci $\exists$ $N \geq 1$ astfel încât $n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 1$, $\forall n \geq N$ $\Leftrightarrow$ $n(1+x_{n+1} - x_n) < x_n$, $\forall$ $n \geq N$

$\Rightarrow (n+1)x_n - n\, x_{n+1} > n$, $(\forall) n \geq N \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq N$

Sumând de la N la N+P ($p \geq 1$) obținem:

$$\frac{x_N}{N} > \frac{x_N}{N} - \frac{x_{N+p}}{N+p} > \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+p} \quad (3).$$

Seria $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{N+p}$ fiind divergentă, relația (3) este absurdă, deci $l \geq 1$.

Observație. $\forall$ $\varepsilon > 0$ există $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 1+\varepsilon$.

11. Să se construiască un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale astfel încât mulțimea $L(x_n)_{n\geq 1}$ a tuturor punctelor sale limită să fie egală cu $[0,1]$.

Soluție

Fie $A_n = \{x \in [0,1];\ x = \frac{m}{2^n},\ 0 \leq m \leq 2^n\}$. Evident, A_n are 2^n+1 elemente.

Să arătăm că şirul $\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{A_1}, \underbrace{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8}_{A_2}, \underbrace{x_9, x_{10}, \ldots, x_{17}}_{A_3}, \ldots$ are proprietățile din enunț.

Într-adevăr, fie $x \in [0,1]$ fixat, $a_k = x - \frac{1}{2^{k+1}}$ şi $b_k = x + \frac{1}{2^{k+1}}$. Deoarece $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}$ şi diferența dintre doi termeni consecutivi ai

mulțimii A_k este $\frac{1}{2^k}$, rezultă că $[a_k,b_k] \cap A_k \neq \varnothing$; fie $x_{x_k} \in [a_k,b_k] \cap A_k$ fixat. Evident avem $n_1<n_2<\ldots< n_k<\ldots$ şi $|x_{x_k} - x| < b_k - a_k = \frac{1}{2^k}$, $\forall k \geq 1$, deci $\lim\limits_{k\to\infty} x_{x_k} = x$.

12. Să se stabilească natura seriei armonice generalizate:

$$1 + \frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots,\ a \in R.$$

Soluție

Dacă $a \leq 0$, şirul termenilor seriei nu converge către 0, deci seria este divergentă. Dacă $a>0$, termenii acestei serii formează un şir descrescător de numere pozitive. Din criteriul de condensare al lui Cauchy, pentru $a>0$, seria dată este de aceeaşi natură cu seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2^n)^\alpha}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$. Cum această serie are rația $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, rezultă că ea este convergentă pentru $\alpha >1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Observație. Pentru $a = 1$ obținem seria divergentă $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, care are proprietatea că orice termen al ei, începând cu al doilea, este medie armonică între termenii alăturați (se numeşte serie armonică). Divergența ei se poate demonstra rapid, prin reducere la absurd, astfel: presupunând că seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este convergentă, fie s suma ei. Atunci avem:

$$s = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots > \frac{1}{2}+1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\ldots=\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+s$$

adică $s \geq \frac{1}{2}+s$, absurd.

13. Să se stabile

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+\alpha+1}\right.$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-}$

e) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$

Soluție

a) Notând a_n =

suma parțială de ran

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha+1}+\lim$

convergentă şi are su

b) Suma pa

$\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\ln(k+1$

că seria dată este d

acestei serii converg

Se confirmă încă o d

conveargă către 0 n

unei serii.

c) Din criteriul

convergență a unei s

la zero. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

d) Termenul g

$\frac{1}{16n^2-8n-3}=$

Amplificând p

13. Să se stabilească natura următoarelor serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+\alpha+1}-2\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha-1}\right)$, $\alpha>0$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$;

e) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}+\ldots$

Soluție

a) Notând $a_n=\sqrt{n+\alpha}-\sqrt{n+\alpha-1}$, se demonstrează uşor că suma parțială de rang n este $s_n=a_{n+1}-a_1$. De aici, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\alpha+1}-\sqrt{n+\alpha}}$. Aşadar, seria dată este convergentă şi are suma $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha+1}$.

b) Suma parțială de rang n a seriei este $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\ln(k+1)-\ln k]=\ln(n+1)$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$, rezultă că seria dată este divergentă (având suma $+\infty$). Şirul termenilor acestei serii converge către 0, cu toate că seria este divergentă. Se confirmă încă o dată că cerința ca şirul termenilor unei serii să conveargă către 0 nu este condiție suficientă pentru convergența unei serii.

c) Din criteriul lui Cauchy rezultă că o condiție necesară de convergență a unei serii este ca şirul termenilor săi să conveargă la zero. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, rezultă că seria diverge.

d) Termenul general al seriei se descompune astfel:

$$\frac{1}{16n^2-8n-3}=\frac{A}{4n-3}+\frac{B}{4n+1}\quad(4)$$

Amplificând pe rând (4) cu 4n-3, respectiv 4n+1, obținem:

$$\frac{1}{4n+1} = A + B\frac{4n-3}{4n+1}, \text{ respectiv } \frac{1}{4n-3} = B + A\frac{4n+1}{4n-3}$$

Pentru n = $\frac{3}{4}$, obținem A= $\frac{1}{4}$, iar pentru n = $-\frac{1}{4}$ se obține B=$-\frac{1}{4}$, deci $\frac{1}{16n^2-8n-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$. Astfel $s_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)$, deci seria converge, iar suma acesteia este $\frac{1}{4}$.

e) Vom stabili divergența seriei cu ajutorul criteriului lui Cauchy; avem: $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|=$

$$= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+6} + \ldots + \frac{1}{3n+3p-2} +$$

$$+ \frac{1}{3n+3p-1} + \frac{1}{3n+3p} > \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} + \ldots + \frac{1}{3n+3p} > \frac{p}{3(n+p)}$$

Luând p =n, obținem $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{2n}| > \frac{1}{6}$. Prin urmare, există $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{6}$) astfel încât oricare ar fi $m \in \mathbf{N}$, există n >m și p = n astfel ca $|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}| > \varepsilon$, deci seria obținută este divergentă, nesatisfăcând condiația din criteriul general al lui Cauchy.

14. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni oarecare și $(u_1+u_2+\ldots+u_{n_1})$ + $(u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2})+\ldots+(u_{n_{k-1}+1}+\ldots+u_{n_k})+\ldots$ seria obținută din aceasta printr-o grupare oarecare a termenilor, fără a le schimba ordinea, în așa fel încât în fiecare grupă să intre termeni de același semn. Să se arate că dacă această serie este convergentă, atunci converge și seria inițială și are aceeași sumă.

Soluție

Fie S'_n sumele parțiale ale seriei inițiale și S''_{n_k} sumele parțiale ale seriei convergente asociate, cu suma S". Cum

$\lim\limits_{k\to\infty} S''_{n_k} = S''$, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_{k_0} \in N$ astfel încât, dacă $n_k \ge n_{k_0}$, să avem $|S''_{n_k} - S''| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Din criteriul de convergență general al lui Cauchy, rezultă $|S''_{n_{k0}} - S''_{n_{k+p}}| < \varepsilon$ $\forall p \in N$, iar din modul de grupare al termenilor, dacă $n_k < n \le n_{k+1}$, $n \in N$, avem $S''_{n_k} \le S'_n \le S''_{n_{k+1}}$ sau $S''_{n_{k+1}} \le S'_n \le S''_{n_k}$. Dacă $n > n_{k_0}$, va exista k astfel încât $n_k < n \le n_{k+1}$, $n_k \ge n_{k_0}$, pentru care $|S'_n - S''| \le |S''_{n_k} - S''| + |S''_{n_k} - S'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + |S''_{n_k} - S''_{n_{k+1}}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ $= \varepsilon$. De aici rezultă concluzia.

Observație. De aici rezultă posibilitatea aplicării criteriului lui Leibniz pentru serii în care alternează semnele unor grupe de termeni. Pentru seria $\sum\limits_{n\ge1} (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \ln\left(\frac{a+n}{n}\right)$, a>0, alternează grupe de trei termeni pozitivi și trei negativi. Cum $\ln\left(\frac{a}{n}+1\right) \to 0$ descrescător, rezultă că seria este convergentă; același lucru (convergența) se poate demonstra aplicând direct criteriul lui Abel (sumele parțiale ale seriei $\sum\limits_{n\ge1} (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}$ sunt mărginite și $\ln\left(\frac{a+n}{n}\right) \to 0$).

15. a) Să se găsească suma seriei armonice alternate:

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + ...$

a) Să se găsească o comutată a acestei serii cu suma ln2 $+ \frac{1}{2}\ln\frac{p}{2}$.

Soluție

Seria armonică alternată $u_n = \sum\limits_{n>1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ este evident convergentă (Leibniz).

Notând $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$, evident $u_n = s_{2n} - 2\left(\frac{1}{2}s_n\right) = s_{2n}-s_n$, adică $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ (identitatea lui Catalan).

Astfel $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$.

Observaţie. Suma seriei armonice alternate poate fi calculată cu ajutorul constantei lui Euler (c = 0,577216...), demonstrând că $s_n = c+\ln n + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$ (5).

Cum $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p < e < \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}$, $p\in N$, rezultă $\frac{1}{p+1} < \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{p}$ (logaritmul fiind funcţie crescătoare).

Sumând inegalităţile obţinute pentru p = 1,2,...,n-1, obţinem:

$\ln n< 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}$, deci $0 < \frac{1}{n}<1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$.

Şirul $y_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent (minorat de c şi descrescător: $y_{n+1}-y_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$), $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=c$, iar $\varepsilon_n = y_n-c \to 0$.

Cum $u_n= S_{2n} -S_n$, se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln 2n - \ln n +\varepsilon_{2n} -\varepsilon_n) = \ln 2$.

Înlocuind în (5) pe n cu 2n, obţinem: $S_{2n} = c + \ln 2n +\varepsilon_{2n}$.

Înmulţind (5) cu $\frac{1}{2}$, rezultă: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}=\frac{c}{2}+\ln\sqrt{n}-\frac{\varepsilon_n}{2}$.

Scăzând relaţiile de mai sus obţinem:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}=\frac{c}{2}+\ln\sqrt{4n}+\varepsilon_{2n}-\frac{\varepsilon_n}{2}.$$

b) Comutând termenii seriei armonice alternate astfel ca după un grup de p termeni pozitivi, în ordine descrescătoare să urmeze un grup de q termeni negativi şi descrescători în valoare absolută, obţinem seria:

$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2q}+\ldots+\frac{1}{2pn-2p+1}+\ldots+\frac{1}{2pn-1}-\frac{1}{2nq-2q+2}-$
$\ldots-\frac{1}{2nq}+\ldots$

Conform exercițiului anterior (problema rezolvată 14) seria obținută mai sus este convergentă și are suma ln2 + $\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$, dacă și numai dacă seria:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2pn-2p+1}+\ldots+\frac{1}{2pn-1}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2nq-2q+2}+\ldots+\frac{1}{2nq}\right)+\ldots$$

este convergentă și are aceeași sumă. Notând $(\sigma_n)_n$ șirul sumelor parțiale ale acestei serii, avem:

$\sigma_{2n} = 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}+\ldots+\frac{1}{2np-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{nq}\right)$, obținem

$\sigma_{2n} = \frac{c}{2}+\ln\sqrt{4np}+\eta_{np}-\frac{1}{2}\left(c+\ln n2+\varepsilon_{nq}\right)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{2}+\eta_{np}-\frac{\varepsilon_{np}}{2}$, unde

$\eta_n = \varepsilon_{2n}-\frac{\varepsilon_n}{2}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Deoarece $\sigma_{2n-1} = \sigma_{2n} + \left(\frac{1}{2nq-2q+2}+\frac{1}{2nq-2q+4}+\ldots+\frac{1}{2nq}\right)$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n}$. Prin urmare, șirul $(\sigma_n)_n$ este convergent către ln2 $+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$ (subșirurile de parități diferite având aceeași limită).

Aplicație: Să se găsească o comutată a seriei armonice alternate cu suma $\frac{\ln 2}{2}$.

16. a) Să se dea exemplu de serie alternată divergentă pentru care șirul termenilor converge la zero;

b) Există serii alternate convergente care nu satisfac condițiile criteriului lui Leibniz?

Soluție

a) Fie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$. Cum $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = 0 = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}$, rezultă că şirul modulelor termenilor acestei serii converge la 0, dar şirul sumelor parțiale este divergent, căci: $s_{2n} = -1+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+...+-\frac{1}{2n-1}+\frac{3}{2n}$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{3}{2}(c+\ln n+\varepsilon_n)-\frac{c}{2}-\ln\sqrt{4n}-\eta_n\to\infty$$

Aşadar, condiția ca şirul modulelor termenilor unei serii alternată să conveargă la zero nu este suficientă pentru convergența seriei, ci devine astfel numai împreună cu condiția ca acest şir să fie descrescător (C.Leibniz).

b) Cu toate acestea, condițiile criteriului lui Leibniz sunt numai suficiente, nu şi necesare pentru convergența seriilor alternate. Vom stabili existența seriilor alternate convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, cu $u_n \geq 0$, pentru care şirul $(u_n)_n$ nu este descrescător.

Notând $v_n = \begin{cases} u_{n-1}, & \text{dacă } n = 2k \\ -u_{n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$, unde $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}u_n$ satisface criteriul, seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este evident alternată, dar şirul $(|v_n|)_n$ tinde la zero, însă nu descrescător. Notând cu $(s_n)_n$ şirul sumelor parțiale al seriei $\sum_{n=1}(-1)^{n-1}u_n$, respectiv cu $(\sigma_n)_n$ pe cel al $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ şi luând $s_0 = 0$, avem $\sigma_n = \begin{cases} s_n, & \text{pentru } n = 2k \\ s_{n-1}, & \text{pentru } n = 2k+1 \end{cases}$, de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

17. Să se studie...

a) $\sum_{n\geq1}(-1)^n \mathrm{tg}\frac{a}{n}$, ...

b) $\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1}\frac{...}{n(n+...}$

c) $\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1}\frac{2^n \sin...}{n...}$

Soluție

a) Pentru orice ...

$n>\frac{2|a|}{\pi}$, tg $\frac{a}{n}$ are sem...

seriei date, obținem c...

inițială, care satisface...

şirul $(|\mathrm{tg}\frac{a}{n}|)_n$ este d...

(convergența nefiind a...

b) Seria este c...

Pentru calculul sum...

simple $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$ ...

La fel ca la de...

succesiv cu n, n + 1, ...

n = - 2, A= $\frac{1}{2}$ = C şi B...

Astfel, $\frac{...}{n(n+1...}$

sumelor parțiale ale a...

$\sigma_{2n}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n-1}...\right.$

$\left.+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right]=$ ...

17. Să se studieze convergenţa seriilor alternate:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{a}{n}$, $a\in R$;

b) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

c) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}$.

Soluţie

a) Pentru orice n natural satisfăcând relaţia $\frac{|a|}{n}<\frac{\pi}{2}$, adică $n>\frac{2|a|}{\pi}$, tg $\frac{a}{n}$ are semnul lui a. Înlăturând primii $\left[\frac{2|a|}{n}\right]$ termeni ai seriei date, obţinem o serie alternată, de aceeaşi natură cu cea iniţială, care satisface criteriul lui Leibniz, întrucât $\lim\limits_{n\to\infty}$ tg $\frac{a}{n}$=0, iar şirul $(|\operatorname{tg}\frac{a}{n}|)_n$ este descrescător. Seria este deci convergentă (convergenţa nefiind absolută).

b) Seria este convergentă satisfăcând criteriul lui Leibniz. Pentru calculul sumei, se foloseşte descompunerea în fracţii simple $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$, $\forall n\in N^*$.

La fel ca la determinarea coeficienţilor în (4), amplificând succesiv cu n, n + 1, n + 2, obţinem, pentru n = 0, n= - 1, respectiv n = - 2, A= $\frac{1}{2}$= C şi B = - 1.

Astfel, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$. Fie $(\sigma_n)_n$ şirul sumelor parţiale ale acestei serii. Atunci:

$$\sigma_{2n}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right]=\frac{1}{2}\left(4s_{2n}-2-1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

unde $(s_n)_n$ desemnează şirul sumelor parţiale ale seriei armonice alternate.

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{2n} = 2\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} - \frac{5}{4}$ şi, cum seria dată este convergentă, rezultă că şirul $(\sigma_n)_n$ are aceeaşi limită, deci suma seriei este $2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

c) Aplicând corolarul criteriului rădăcini, obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sin^2 x}{\sqrt[n]{n+1}} = 2\sin^2 x$, adică absolut convergenţa seriei pentru $2\sin^2 x < 1 \Rightarrow \cos 2x > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Pentru $\cos 2x < 0$, seria este divergentă, iar pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, seria devine $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, care, în baza criteriului lui Leibniz este convergentă. Seria modulelor este însă divergentă (seria armonică din care lipseşte primul termen). Aşadar, pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, seria este semiconvergentă.

Observaţie. Ca şi criteriul lui Leibniz, criteriul lui Abel dă condiţii suficiente (nu şi necesare) de convergenţă a seriilor. Exemplu: $\frac{1}{3^a} - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{5^a} - \frac{1}{4^a} - \ldots - \frac{1}{(2n)^a} + \frac{1}{(2n+1)^a}$ converge pentru orice $a>0$ (deşi şirul $(\alpha_n)_n$ nu este monoton).

18. a) O serie cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n\ge1} x_n$ este divergentă $\Leftrightarrow$ $\exists\, (a_n)_n$, un şir strict crescător, divergent, de numere pozitive astfel încât $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$, $\forall\, n \ge 1$.

b) O serie cu termenii pozitivi $\sum_{n\ge1} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ $\exists\ (a_n)_n$, un şir strict crescător, divergent, de numere pozitive astfel încât $x_n = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}}$.

Soluţie

b) "$\Rightarrow$" Dacă $\sum_{n\ge1} x_n$ este convergentă, atunci restul seriei de ordin n, $r_n = \sum_{i\ge n} x_i$ este descrescător şi convergent la 0. Fie $a_n = \frac{1}{r_n}$, $\forall\ n \ge 1$. Evident $a_n \nearrow \infty$ şi $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = r_n - r_{n+1} = x_n$, $\forall\ n \ge 1$.

"$\Leftarrow$" Dacă $0 < a_n < a_{n+1}$ $\forall\ n \in N^*$ şi $a_n \nearrow \infty$, iar $x_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$ $\forall\ n \ge 1$, atunci avem $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \to \frac{1}{a_1} (n \to \infty)$. Prin urmare, seria $\sum_{n\ge1} x_n$ este convergentă.

a) "$\Rightarrow$" Presupunem seria $\sum_{n\ge1} x_n$ divergentă şi fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir definit astfel: $a_1 > 0$ arbitrar şi $a_{n+1} = (1+x_n)a_n$, $\forall\ n \ge 2$. Atunci avem: $a_{n+1} = (1+x_n)(1+x_{n-1})a_{n-1} = \ldots = (1+x_n)(1+x_{n-1})\ldots(1+x_1)a_1$ $\forall\ n \ge 1$, deci $a_{n+1} = (1+x_n)a_n > a_n$, $\forall\ n \ge 1$.

Din inegalitatea lui Bernoulli $\left(\sum_{i=1}^{n}(1+a_i) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \forall a_i > 1\right)$ deducem $a_{n+1} \ge \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_1$, deci $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$.

"$\Leftarrow$" Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir strict crescător divergent de numere pozitive, astfel încât, $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ $\forall\ n \ge 1$. Atunci $\forall\ 1 \le n < m$ avem:

$$\sum_{i=n}^{m} x_i = \sum_{i=n}^{m} \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i} > \frac{1}{a_{m+1}} \sum_{i=n}^{m} (a_{i+1} - a_i) = 1 - \frac{a_n}{a_{m+1}}$$

Cum $a_m \nearrow \infty$, pentru n fixat, există m > n astfel încât $\frac{a_n}{a_{m+1}} < \frac{1}{2}$, deci $\sum_{i=n}^{m} x_i > \frac{1}{2}$ şi, conform criteriului general al lui Cauchy, seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ nu este convergentă.

19. Folosind criteriile de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, stabiliţi natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$;

b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

c) $a + \sum_{n\geq 2} \left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-\sqrt[3]{e}\right)\ldots\left(2-\sqrt[n]{e}\right)a^n$, a>0;

d) $\sum \frac{1}{a^n + n}$, a> -1;

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(1+a+\ldots+a^n)}$, a > 0;

f) $a_n = 1 - \cos\frac{x}{n}$, $n \geq 1$.

Soluţie

a) Cum $(\ln \ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln\ln\ln n} = (e^{\ln n})^{\ln\ln\ln n} = n^{\ln\ln\ln n}$ şi lnlnln $e^{e^{e^2}}$ = lnln e^{e^2} = $\ln e^2$ = 2; pentru $n > e^{e^{e^2}}$ avem $n^{\ln\ln\ln n} > n^2$ şi deci $\frac{1}{(\ln\ln n)}\ln n = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$. În baza primului criteriu de comparaţie, deducem că seria dată este convergentă, căci seria cu care o comparăm este seria armonică generalizată cu a = 2>1.

b) Întrucât $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$, $\forall$ $n \in N^*$, rezultă: $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ $\forall n \geq 2$.

Însă $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ =1, primul criteriu de comparaţie conducând la

divergenţa seriei date, s

sus, divergentă.

c) Deoarece

criteriul lui d'Alamber
convergentă, iar dacă

avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n+1]{e} > 2$

orice n ≥ 2 (deoarece

În baza celui
divergenţa seriei (seri

d) Dacă a > 1

seria geometrică de

primului criteriu de co

Dacă −1 < a
a = 1, seria fiind cea
pentru |a| <1, compa
conduce la rezultatu

$\frac{\frac{1}{a^n+n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{a^n+n}$ şi $\lim_{n\to\infty}$

e) Pentru a >

dată este converge

seria de comparaţ

convergentă.

divergența seriei date, seria $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ fiind, conform celor arătate mai sus, divergentă.

c) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a(2-\sqrt[n+1]{e}) = 2a - a\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = a$, din criteriul lui d'Alambert deducem că dacă a < 1, seria este convergentă, iar dacă a < 1 este divergentă. Pentru cazul a = 1, avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2-\sqrt[n+1]{e} > 2-\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$ = 2-1-$\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$ pentru orice $n \geq 2$ (deoarece $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall$ $n\in N$).

În baza celui de-al doilea criteriu de comparație, rezultă divergența seriei (seria cu care am comparat fiind cea armonică).

d) Dacă a > 1, $\frac{1}{a^n+n} < \frac{1}{a^n}$, $\forall n\in N$. Cum seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a^n}$ este seria geometrică de rație $\frac{1}{a}$<1, convergentă, rezultă, în baza primului criteriu de comparație, convergența seriei în acest caz.

Dacă $-1 < a \leq 1$, seria este divergentă; în cazul în care a = 1, seria fiind cea armonică din care lipseşte primul termen, iar pentru |a| <1, compararea cu această serie (criteriul al treilea) va conduce la rezultatul anunțat. Astfel, $|a| <1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a|^n = 0 \Rightarrow$

$\frac{\frac{1}{a^n+n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{a^n+n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+a^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a^n}{n}} = 1$, deci concluzia.

e) Pentru a >1, avem $\frac{1}{n(1+a+\ldots a^n)} < \frac{1}{a^n}$, $\forall n\in N$. Astfel, seria dată este convergentă (în baza primului criteriu de comparație), seria de comparație fiind cea geometrică de rație $\frac{1}{a}$, deci convergentă.

Pentru a = 1, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Cum $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbf{N}$, rezultă şi în acest caz convergenţa.

Pentru a <1, vom aplica criteriul al treilea de comparaţie, folosind ca serie de comparaţie pe cea armonică, aceasta fiind divergentă. Avem $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+...+a^n)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a+...+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a}{1-a^{n+1}}=$ $=1-a$; rezultă că seria dată este divergentă.

f) Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\left(\frac{x}{n}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=\frac{x^2}{2}$, în baza celui de-al treilea criteriu de comparaţie, seria este convergentă.

20. Să se arate că există atât serii divergente, cât şi serii convergente $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cu termeni pozitivi, astfel încât $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ şi $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

Soluţie

Seria $\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2^2}+2^2+...+\frac{1}{2^n}+2^n+...$ este de aceeaşi natură cu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+2^n\right)$. Avem $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}=\frac{1}{2^{2n+1}}$ şi $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=2^{2n}$, deci $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1$ şi $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$.

Cum $\frac{1}{2^n}+2^n>2^n$, $\forall n\in\mathbf{N}$, seria considerată este divergentă.

Seria $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+...$ este de aceeaşi natură cu $\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$. Cum $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n\in N$; conform primului criteriu de comparaţie, rezultă că seria considerată este convergentă (seria de comparaţie fiind cea geometrică de raţie $\frac{1}{2}$, deci convergentă).

Pentru această serie avem $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ şi $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$, deci $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1$ şi $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$. Prin urmare, există atât serii divergente, $\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{2^n}+2^n\right)$, cât şi serii convergente $\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ cu proprietăţile din enunţ. Pentru seria convergentă de mai sus, având termenul general $u_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$, rezultă că şirul sumelor parţiale, având termenul general:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$ este convergent.

Suma seriei este: $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$.

Observaţie. Criteriul lui D'Alambert nu precizează nimic asupra convergenţei acestei serii, dar şirul $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ corespunzător seriei: $\frac{1}{2},\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}},\sqrt[4]{\frac{1}{3^2}},...,\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^n}},\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}$ are $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, exemplul ilustrând faptul că (vezi problema rezolvată nr.8), criteriul lui Cauchy este mai bogat în informaţii decât cel al lui D'Alambert.

21. Studiați natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$, a>0;

b) $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n$, a>0;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, a>0.

Soluție

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n n^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$ ae. Astfel, conform criteriului lui D'Alambert, seria converge pentru $a < \frac{1}{e}$ şi diverge pentru $a > \frac{1}{e}$. Pentru $a = \frac{1}{e}$, avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}},$$ de unde, în baza celui de-al doilea criteriu al comparației, rezultă divergența.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$ ae. Conform criteriului lui Cauchy, rezultă că seria dată este convergentă pentru $a<\frac{1}{e}$ şi divergentă pentru $a > \frac{1}{e}$. Pentru $a = \frac{1}{e}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$.

Inegalitatea utilizată şi la punctul a), $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in N$ implică: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, de unde $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} \geq$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$. Deci

cazul $a = \frac{1}{e}$, seria re

c) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right.$

$\ln a \cdot \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$ ln

adică $a < \frac{1}{e}$, seria

divergentă.

Pentru $a = \frac{1}{e}$

armonică, deci diver

Observație.

raportului nu poate

22. Să se stu

a) 1 + a + ab

b) $u_n = 2^{(-1)^n-}$

c) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-}{(2n}$

Soluție

Vom aplica

considerate.

Şirul rapoart

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$. Deci şirul termenilor seriei nu converge la zero în cazul a = $\frac{1}{e}$, seria rezultând a fi divergentă.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}\cdot\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$

$\ln a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ = $\ln a\cdot\ln\frac{1}{e}$ = - lna. Prin urmare, dacă $-\ln a>1$, adică $a<\frac{1}{e}$, seria dată este convergentă, iar dacă $a>\frac{1}{e}$, este divergentă.

Pentru $a=\frac{1}{e}$, $a^{\ln n}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n}=\frac{1}{n}$, seria este tocmai seria armonică, deci divergentă.

Observaţie. Asupra seriei de la punctul c), criteriul raportului nu poate preciza nimic, întrucât $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

22. Să se studieze natura seriilor:

a) $1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\ldots+a^nb^{n-1}+a^nb^n+\ldots$ $(0<a<b)$;

b) $u_n=2^{(-1)^n-n}$

c) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$

Soluţie

Vom aplica criteriul raportului pentru fiecare din seriile considerate.

Şirul rapoartelor $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ va fi:

a) $\begin{cases} a, & n=2k+1 \\ b, & n=2k \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{8}, & n=2k \\ 2, & n=2k+1 \end{cases}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}=1$

Astfel:

a) Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=b$ şi $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n=a$, dacă a>1, seria este divergentă, iar dacă b < 1 obţinem convergenţa. Criteriul nu dă nici un răspuns în cazul a < 1 < b.

Utilizând criteriul rădăcinii, şirul $\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases} \sqrt[2n]{a^n b^{n-1}}, & n=2k \\ \sqrt[2n+1]{a^n b^n}, & n=2k+1 \end{cases}$ are $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\sqrt{ab}$. Atunci, dacă ab <1 seria este convergentă, iar dacă ab >1 seria este divergentă. Dacă ab = 1, adică $b=\frac{1}{a}$, se obţine seria divergentă 1 + a + 1 + a + 1 + a...

b) Mulţimea punctelor limită a şirului rapoartelor este $L\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\left\{\frac{1}{8},2\right\}$, deci $l \not> 1$ şi $L \not< 1$. Din nou, criteriul lui D'Alambert nu dă nici o informaţie asupra naturii seriei. În schimb, criteriul radical al lui Cauchy stabileşte convergenţa seriei, întrucât $\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{2}\cdot 2^{(-1)^n}\to\frac{1}{2}<1$; se poate folosi criteriul I al comparaţiei.

c) Nici în acest caz, criteriul lui D'Alambert nu precizează nimic asupra naturii seriei (l = 1). În schimb, convergenţa se stabileşte cu ajutorul criteriului Raabe – Duhamel:

$$n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right)=n\frac{6n-1}{2n-1}\to\frac{3}{2}>1.$$

23. a) Cercetaţi natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a(a+n)\ldots(a+nr-r)}{b(b+r)\ldots(b+nr-r)}\right]^{\alpha}$, a,b,r >0, $\alpha\in R$;

b) Studiaţi convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\alpha\in R\setminus N$.

Soluție

Seria a) este o serie cu termeni pozitivi. Pentru ambele, vom aplica criteriul lui Raabe – Duhamel. Obținem:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{nr+b}{nr+a}\right)^{\alpha}-1\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{nr+b}{nr+a}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}$. Pentru a calcula această limită, vom determina limita funcției $f:R_+^* \to R$, $f(x) = \frac{\left(\frac{r+bx}{r+ax}\right)^{\alpha}-1}{x}$ în origine, cu ajutorul regulii lui L'Hospital. Astfel,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\alpha\left(\frac{r+bx}{r+ax}\right)^{\alpha-1}\frac{b(r+ax)-a(r+bx)}{(r+ax)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{r+bx}{r+ax}\right)^{\alpha-1}\frac{\alpha r(b-a)^2}{(r+ax)} = \frac{\alpha}{r}(b-a)$$

Rezultă că: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha}{r}(b-a)$, deci convergența seriei dacă $r < \alpha(b-a)$ şi divergența dacă $\alpha(b-a) > r$.

b) Avem $\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)|} = \frac{n+1}{|n-\alpha|}$, deci pentru $n > \alpha$ obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} = \alpha+1$.

Aşadar, pentru $\alpha > 0$ ($\alpha+1>1$), seria dată este absolut convergentă.

Pentru $\alpha = 0$, toți termenii seriei sunt nuli, deci convergența absolută are loc $\forall\alpha \geq 0$.

Dacă $\alpha<0$, $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-\alpha-1)}{n!}$, unde $a_n = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-\alpha-1)}{n!} > 0$, deci seria dată este o serie alternată. Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\alpha}{n+1}$, şirul $(a_n)_n$ este şir crescător de numere

pozitive, dacă $\alpha \le -1$, deci are limita nenulă, iar seria este divergentă. Pentru $\alpha \in (-1,0)$, seria satisface criteriul lui Leibniz, fiind, prin urmare, semiconvergentă (seria modulelor fiind divergentă).

B. Probleme propuse

1. Determinați, pentru orice $\varepsilon > 0$, rangul $N(\varepsilon)$ cu proprietatea că, pentru orice $n \ge N(\varepsilon)$, avem, $|x_n - 0| < \varepsilon$, dacă:

a) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

b) $x_n = \dfrac{2}{n^3+1}$;

c) $x_n = \dfrac{2\cdot 3^n + (-3)^n}{4^n}$.

R. a) $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$; b) $\left[\sqrt[3]{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]+1$; c) $\left[\dfrac{\ln\frac{\varepsilon}{3}}{\ln\frac{3}{4}}\right]+1$

2. Folosind definiția limitei unui şir, arătați că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{5n-1}=\dfrac{4}{5}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\ne 2$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2}{n+1}=\infty$.

3. Să se arate, plecând de la definiție, că: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4. Folosind criteriul lui Cauchy, demonstrați convergența şirurilor:

a) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{2^k}$;

b) $y_n = \dfrac{\cos x}{3}+\dfrac{\cos 2x}{3^2}+\ldots+\dfrac{\cos nx}{3^n}$;

c) $z_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

5. Fie $(x_n)_{n\ge1}$
subşirurile $(x_{2n})_{n\ge1}$,
are limită.

6. Fie $(x_n)_n$ u
este cuprins între x_n

Indicație

Fie I_{x_n} interva
iar $\cap I_n = \{x\}$.

7. Fie $(a_n)_{n\ge1}$
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există
$\forall$ m,n $\ge n_0$.

Indicație

"$\Rightarrow$" $\varepsilon := \dfrac{|a|}{2}$, se
este fundamental.

8. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ u
$x_{n+m} \le x_n + x_m$, $\forall$ n,
$\inf\limits_{n\ge1}\dfrac{x_n}{n}$

9. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Indicație

Se poate dem

5. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că subşirurile $(x_{2n})_{n\geq 1}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ şi $(x_{3n})_{n\geq 1}$ au limită. Arătaţi că $(x_n)_n$ are limită.

6. Fie $(x_n)_n$ un şir cu proprietăţile 1^0 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$; 2^0 x_{n+1} este cuprins între x_n şi x_{n-1}, $\forall$ $n>1$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Indicaţie

Fie I_{x_n} intervalul de capete x_{n-1} şi $x_n \to I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \ldots$, iar $\cap I_n = \{x\}$.

7. Fie $(a_n)_{n\geq 1} \subset R$ astfel încât $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2$ există şi $b \in R^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta > 0$, $\exists n_0 \geq 1$ astfel încât $|a_n + a_m| > \delta$, $\forall$ $m,n \geq n_0$.

Indicaţie

"$\Rightarrow$" $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$, se foloseşte definiţia; "$\Leftarrow$": demonstrăm că $(a_n)_n$ este fundamental.

8. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale care satisface condiţia $x_{n+m} \leq x_n + x_m$, $\forall$ $n,m > 1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ există şi este egală cu $\inf\limits_{n\geq 1} \frac{x_n}{n}$

9. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, atunci $|x| \leq \sup\limits_{n>1} |x_n|$

Indicaţie

Se poate demonstra prin reducere la absurd.

10. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere pozitive. Atunci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geq e$.

Indicaţie

Problema rezolvată nr.10.

11. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că există $|\lambda| < 1$, $\lambda \in R$ astfel încât: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - \lambda x_n) = 0$. Atunci $(x_n)_n$ este convergent şi are limita 0.

12. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent cu elemente din R^*. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita nenulă $\Leftrightarrow \inf\limits_{n\geq 1}|x_n| > 0$.

13. Demonstraţi convergenţa şirurilor:

a) $1\cdot\sqrt{1+\sqrt{1}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\ldots$;

b) $x_1 = \sqrt{1-a}$, $x_n+1 = \sqrt{1-x_n}$, $a \in (0,1)$;

c) $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$;

d) $z_n = \frac{\ln n!}{n\ln n}$.

R: a) $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) subşirurile de parităţi diferite au aceeaşi limită, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; c) $y_n \in \left[1, \frac{47}{36}\right]$ este monoton crescător; d) se aplică Stolz-Cesaro; $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

14. Determinaţi limitele extreme ale şirurilor:

a) $x_n = \sin\frac{n\pi}{3}$; b) $x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$; c) $x_n = 1+2(-1)^{n-1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

d) $x_n = \frac{1}{n}n^{(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2}$; e) $x_n = 1+\frac{(-1)^n}{2} + (-1)^n\frac{n}{2n+1}$;

f) $\sqrt{x_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right.$

$\sin\frac{n\pi}{2}$.

R: a) −

e+1; g) −1,1; h

15. a) F

de numere re

b) Fie A

acumulare în

$L(x_n) = A$.

R: a) A

$a_2+\frac{1}{2}, \ldots, a_k+$

b) A =

$a_1+\frac{1}{n}$, $a_2+\frac{1}{n}$,..

16. Fie

există $x_n \in A$ \

Obser

$x \in \overline{R}$ este pu

subşir al său

17. Sp

există $M \in R_+^*$

$\forall n \in N^* \setminus \{1\}$:

a) Să

este

b) Să

vari

f) $\sqrt{x_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$; g) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$; h) $x_n = \frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}$.

R: a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $0, \infty$; c) $-4, 6$; d) $-1, 1$; e) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; f) $-e-\frac{1}{2}$, $e+1$; g) $-1, 1$; h) $-\frac{1}{2}$, 1.

15. a) Fie $A \subseteq R$ o mulțime finită. Atunci există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, astfel încât: $L(x_n) = A$.

b) Fie $A \subseteq R$ o mulțime numărabilă care nu are puncte de acumulare în $\overline{R}$. Atunci există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din R astfel încât $L(x_n) = A$.

R: a) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2}, \ldots, a_k+\frac{1}{2}, a_1+\frac{1}{n}, \ldots a_k+\frac{1}{n}, \ldots$

b) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este a_1+1, $a_1+\frac{1}{2}$, $a_2+\frac{1}{2}, \ldots, a_1+\frac{1}{n}$, $a_2+\frac{1}{n}, \ldots, a_n+\frac{1}{n}, \ldots$

16. Fie $A \subset \overline{R}$. Să se arate că $x \in A'$ dacă şi numai dacă există $x_n \in A \setminus \{x\}$ şi $x_n \to x$.

Observație. Analog, se demonstrează afirmația: un punct $x \in \overline{R}$ este punct limită al unui şir dacă şi numai dacă există un subşir al său convergent în $\overline{R}$ la x.

17. Spunem că şirul $(x_n)_{n\in N^*}$ este cu variație mărginită dacă există $M \in R_+^*$ astfel încât $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < M$ $\forall n \in N^* \setminus \{1\}$:

a) Să se demonstreze că orice şir cu variație mărginită este convergent;
b) Să se construiască un şir convergent care să nu fie cu variație mărginită.

Indicație

a) $y_n = \sum_{k=2}^{n} |x_k - x_{k-1}|$ convergent $\Rightarrow (x_n)_n$ fundamental

R. b) $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2n}$.

18. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale.

a) Dacă $x^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ şi $x_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, atunci $\inf_{i\geq k} x_i \leq x_* \leq x^* \leq \sup_{i\geq k} x_i$, $\forall\, k \geq 1$;

b) Mulțimea $L(x_n)$ a tuturor punctelor limită ale şirului dat este închisă.

19. Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ o serie de numere reale cu proprietatea că există un şir convergent de numere reale $(f(n))_{n\geq 1}$ şi $p \geq 1$ astfel încât $a_n = f(n+p) - f(n)$, $\forall n\geq 1$.

Atunci, seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă şi are suma $s = p \lim_{n\to\infty} f(n) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Aplicații: Să se calculeze sumele:

a) $\sum_{n\neq k} \dfrac{1}{n^2 - k^2}$; b) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+p)}$; c) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n+k}{n^2(n+1)^2 \ldots (n+2k)^2}$;

d) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(p+n)(p+n-1)\ldots(p+2)(p+1)}{(q+1)(q+2)\ldots(q+n)}$, q-p>1; e) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{C_{k+n}^{k}}$, $k\in N^* \setminus \{1\}$;

f) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{C_{n+1}^{2}}$; g) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$; h) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+n-1}{(n+1)!}$; i) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{(2n+1)!!}$.

Indicație

Se va calcula suma parțială s_n. $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Se aplică exercițiul teoretic pentru f(n) = : a) $\frac{1}{2k}\frac{1}{n-k}$;

b) $-\frac{1}{p\cdot n}$; c) $\frac{1}{4k}-\frac{1}{n^2(n+1)^2...(n+2k-1)^2}$; d) $-\frac{1}{q-p-1}\frac{q!}{p!}\frac{(p+n)!}{(q+n-1)!}$.

R.

a) $\frac{3}{4k^2}$; b) $\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ c) $\frac{1}{4k((2k)!)^2}$; d) $\frac{p+1}{q-p-1}$; e) $\frac{1}{k-1}$; f) 2; g) $\frac{1}{2}$; h) 1; i) $\frac{1}{2}$.

20. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}b)(1+a^n b)}$, $a,b\in R_+$

R. $S = \begin{cases} \frac{1}{1-a}\frac{1}{1+b}, & |a|<1 \\ \frac{1}{1-a}\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1-a}\frac{1}{b}, & |a|>1 \end{cases}$

21. Să se discute convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ după valorile parametrului $a\in R$, unde $x_n = 1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+...+\frac{1}{n^a}$ și a șirului $y_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$.

R. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent pentru $a>1$ și divergent pentru $a \leq 1$; $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător și minorat de 0, iar limita sa se numește constanta lui Euler.

22. Să se arate că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n^p}{n!}$ $(p\in N)$ este convergentă și să se calculeze suma sa în cazul p = 2 și p = 3. Calculați $\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n-m+1)(n-m+2)...(n-1)n^2}{n!}$.

R. 2e, 5e, (m+1)e.

23. Fie $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ o serie cu termeni pozitivi și descrescători, iar $(a_n)_n$ un șir crescător divergent de numere naturale, astfel încât

şirul de termen general $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ să fie mărginit. Să se arate că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)u_{a_n}$ sunt de aceeaşi natură (criteriul de condensare al lui Cauchy).

Observaţie. Întrucât şirul $a_n = 2^n$ satisface în mod evident proprietăţile impuse, de cele mai multe ori aceasta va fi alegerea.

24. Stabiliţi natura seriei geometrice $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ $a, q \in R$, precum şi cea a seriilor $\sum_{n\ge1} na^{n-1}$ şi $\sum_{n\ge1}\frac{n}{a^n}$, unde $a \in R$.

R. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n\ge0} aq^n = \frac{a}{1-q}$, $|q| \ge 1 \Rightarrow$ şirul termenilor seriei nu tinde la 0; $\sum_{n\ge1} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$, dacă $|a|<1$; pentru $|a| > 1$ $\sum_{n\ge1}\frac{n}{a^n} = \frac{a}{(1-a)^2}$.

Observaţie. Dacă $q = -1$, suma parţială de rang n a seriei geometrice este $s_n = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } n = 2k \\ a & \text{, dacă } n = 2k+1 \end{cases}$, deci şirul $(s_n)_n$ al sumelor parţiale este mărginit, dar nu are limită (condiţia de mărginire a şirului sumelor parţiale ale unei serii nu este o condiţie suficientă pentru convergenţa seriei).

25. Dacă în seria armonică $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}$ eliminăm toţi termenii care conţin o cifră pară, seria rezultată este convergentă şi are suma $s < 7$.

Indicaţie

Grupând convenabil termenii, se obţine:

$s < 2 + \frac{25}{11} + \frac{125}{111} + \frac{325}{1111} \ldots < 2 + \frac{25}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{10}} = 7$

26. Să se st

a) $\sum_{n\ge1}\frac{2^n+(-}{5^n}$

d) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1}{3}$

$\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n}$

R. a) $\frac{5}{6}$; b) $5-$

27. Utilizân

Cauchy), stabiliţi c

a) $\sum_{n\ge1}\frac{\cos nx}{3^n}$

Observaţie

28. Fie $(x_n$

astfel încât $\lim_{n\to\infty} x^p$

mărginit $\Leftrightarrow p > 1$.

29. Fie (x_n)

$\lim_{n\to\infty} n^p(x_{n+1} - x_n) = a$

30. Dacă s

$(x_n)_{n\ge1}$ este conve

Indicaţie

$s_n = \sum_{k=2}^{n}|x_k -$

$\frac{(-1)^n}{n}$.

26. Să se stabilească suma seriilor:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(-\sqrt{3})^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{2}+1)}$;

d) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}+...$; e) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+...+\frac{1}{n(n+3)}+...$; f) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+$ $...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}+...$; g) $a_n=\frac{1}{n(2n+1)}$; h) $b_n=\frac{2n-1}{2^n}$; i) $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

R. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{11}{18}$; f) $\frac{1}{12}$ g) $2(1-\ln 2)$; h) 3; i) $\frac{2}{3}$

27. Utilizând criteriul general de convergență (al lui Cauchy), stabiliți convergența seriilor:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{3^n}$; b) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Observație. Se poate folosi un criteriu de comparație.

28. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x^p(x_{n+1} - x_n) = a > 0$, cu $p > 0$. Atunci $(x_n)_n$ este mărginit $\Leftrightarrow p > 1$.

29. Fie $(x_n)_n$ un şir strict crescător de numere pozitive a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} n^p(x_{n+1} - x_n) = a > 0$, cu $p > 1$. Atunci $(x_n)_n$ este mărginit $\Leftrightarrow p > 1$.

30. Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 2}|x_n - x_{n-1}|$ este convergentă, $x_n\in R$, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Indicație

$s_n = \sum\limits_{k=2}^{n}|x_k - x_{k-1}|$ este şir fundamental. Contraexemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

31. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ convergentă şi $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} u_m$. Să se arate că: a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n}$ diverge; b) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sqrt{r_n}}$ converge.

32. Fie seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ şi $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Atunci:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n}$ diverge; b) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n^2}$ converge.

Indicaţie

În problemele 31, 32, divergenţa se arată cu criteriul lui Cauchy, iar convergenţa cu primul criteriu de comparaţie.

33. O serie cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin, $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{x_n}{a_n}$ $\forall$ n ≥ 1 este convergent.

34. O serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ cu termeni din (0,1) este divergentă $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $(a_n)_n$, un şir strict crescător divergent de numere pozitive astfel încât:

$$x_n = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Indicaţie

"$\Rightarrow$" Considerând $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - x_n}$, $\forall$ n ≥ 2, demonstraţia este similară celei utilizate în problema rezolvată nr.18.

35. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ convergentă. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n} = 0$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Indicație

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k = ns_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k \left(s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \right)$

$\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ convergentă $\Rightarrow$ $\exists$ s = $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, conform teoremei Stolz; concluzia este imediată; b) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \ldots + ku_k}{k(k+1)} \to s$.

36. Stabiliți natura seriilor cu termenul general u_n (folosind criteriile de comparație):

a) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $n \geq 1$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$, $n \geq 1$; c) $\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}$, $n \geq 1$;

d) $\dfrac{1}{(\ln n)^p}$, $p > 0$, $n \geq 2$; e) $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n \geq 2$; f) $\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $a > 0$;

g) $\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$, $x > 0$, $n \geq 1$; h) $\sqrt[n]{a} - 1$, $a > 1$; i) $\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

Indicație

Pentru a) ...f) se foloseşte primul criteriu de comparație, iar pentru g) şi h) al treilea; i) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \Rightarrow$

$\sum\limits_{n\geq 1} \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}$ are aceeaşi natură cu $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

R. a) convergentă $\left(u_n < \frac{1}{2^n}\right)$; b) convergentă $\left(u_n < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$; c) convergentă $\left(u_n < \frac{1}{n^2}\right)$; d) divergentă $\left(u_n < \frac{1}{n}\right)$; e) convergentă $\left(u_n < \frac{1}{n^2}\right)$; f) pentru $a < 1$, seria este convergentă, iar pentru $a \ge 1$ este divergentă; g) h) divergente $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} > 0\right)$.

37. Stabiliți convergența absolută și semiconvergența următoarelor serii:

a) $\sum\limits_{n\ge1} \frac{a_n}{n(n+\sqrt{3})}$, $(a_n)_n$ mărginit;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[n^2]{n}}$;

e) $\sum\limits_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{(n+a)^{\alpha}}$ $a \notin Z \setminus Q$, $\alpha > 0$.

R. a) absolut convergentă;

b) $\alpha \begin{cases} \le 0, \text{ divergentă} \\ \in (0,1], \text{ semiconvergentă;} \\ > 1, \text{ absolut convergentă} \end{cases}$ c) semiconvergentă; d) divergentă; e) α: $\begin{cases} \in (0,1], \text{ semiconvergentă} \\ > 1, \text{ absolut convergentă} \end{cases}$

38. Arătați că

incloncudent, conve

lui Cauchy.

a) $a_{2n} = a_{2n+}$

b) $a_{2n-1} = (ab$

39. Fie $(a_n)_{n\ge}$

are limita $+\infty$. Atunc

40. Să se de

a) $\frac{K^n}{n!}$, $K>$

e) $\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$; f)

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!b}{(b+a_1)(2b+a}$

R. Natura

criteriilor de conve

a) converg

c) convergentă p

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\right)$; e)

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a\right)$; g)

pentru a = b, nat

38. Arătați că pentru seria $\sum_{n\geq 1} a_n^n$, criteriul lui D'Alambert este incloncudent, convergența putând fi stabilită cu ajutorul criteriului lui Cauchy.

a) $a_{2n} = a_{2n+1} = a^n$, $\forall\, n \geq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$;

b) $a_{2n-1} = (ab)^{n-1}$, $a_{2n} = a^{n-1}b$

39. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere pozitive care are limita $+\infty$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$ este divergentă.

40. Să se determine natura seriilor cu termen general u_n:

a) $\frac{K^n}{n!}$, $K > 0$; b) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; c) $\frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$; d) $n^2 \arcsin \frac{\pi}{2^n}$;

e) $\frac{n^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \frac{n^2 + n + 1}{n^3}\right)$, $a > 0$; g) $\sum_{n\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-1)}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, b^n}{(b + a_1)(2b + a_2)\ldots(nb + a_n)}$, $(a_n)_n \to a$.

R. Natura seriilor de mai sus se stabileşte cu ajutorul criteriilor de convergență pentru serii cu termeni pozitivi rezultând:

a) convergentă $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0\right)$; b) convergentă $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e}\right)$;

c) convergentă pentru $a < e$ (Raabe-Duhamel); d) convergentă $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\right)$; e) convergentă $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\right)$; f) convergentă $a < 1$ $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a\right)$; g) divergentă $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}\right)$; h) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{a}{b}$; pentru $a = b$, natura seriei va depinde de şirul $(a_n)_n$ convergent la a.

3

CONVERGENŢA SIMPLĂ, CONVERGENŢA UNIFORMĂ A ŞIRURILOR DE FUNCŢII

Autor: lector.dr. SORIN BAZ

3 CONVERGENŢA SIMPLĂ, CONVERGENŢA UNIFORMĂ A ŞIRURILOR DE FUNCŢII

3.1. Şiruri de funcţii

A. Probleme rezolvate

1. Fie şirul de funcţii $\{f_n: IR \to IR\}_{n\geq 1}, f_n(x) = n^p x^n$, $p \in IN^*$, fixat. Să se determine mulţimea de convergenţă şi funcţia limită. Să se studieze convergenţa uniformă a şirului pe mulţimea de convergenţă.

Soluţie.

Fie x astfel încât $|x| \geq 1$. Dacă $x \geq 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} n^p x^n = \infty$, iar dacă $x \leq -1$ şirul $\{f_n(x)\}_n$ nu are limită.

Presupunem $|x| < 1$. Există $\alpha > 0$ pentru care $|x| = \frac{1}{1+\alpha}$.

Atunci, dacă $n \geq p$ putem scrie:

$$|x|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \frac{1}{1+n\alpha+.....+\alpha^n} < \frac{1}{\frac{n(n-1)....(n-p)}{(p+1)!}\alpha^{p+1}} =$$

$$= \frac{(p+1)!}{n(n-1)...(n-p)\alpha^{p+1}},$$

deci $n^p|x|^n \leq \frac{(p+1)!}{\alpha^{p+1}\cdot n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{n-p} \xrightarrow[n]{} 0$, de unde $\lim_{n\to\infty} n^p x^n = 0$.

Aşadar, pe intervalul $(-1,1)$, şirul converge simplu către funcţia nulă ($f(x) \equiv 0$).

Vom demonstra că şirul $\{f_n\}$ nu este uniform convergent pe $(-1,1)$. Într-adevăr, dacă alegem $x_n = \frac{n-1}{n}$ vom avea $f_n(x_n) = n^p\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} \infty$, deoarece $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$ şi, atunci, putem afirma: există $\varepsilon_0 = 1$ astfel încât, pentru orice $n' \in IN$, există $n \geq n'$ şi $x_n = \frac{n-1}{n}$ cu proprietatea $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Dacă ne restrângem la o mulţime de tipul $[-\beta, \beta]$, din faptul că $|x| \leq \beta < 1$ se obţine $n^p|x|^n \leq n^p \beta^n \xrightarrow[n]{} 0$, pe baza demonstraţiei anterioare. Din inegalitatea precedentă, conform criteriului lui Weierstrass, se deduce convergenţa uniformă a lui f_n către f, pe orice submulţime de forma $[-\beta, \beta]$ a lui $(-1,1)$.

2. Pentru şirul de funcţii $\{f_n : IR \to IR\}_{n \geq 1}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^{2n})}{x^n}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

, să se studieze convergenţa simplă, respectiv cea uniformă, precizând limita şi mulţimile de convergenţă corespunzătoare.

Soluţie.

Să presupunem că am ales un $x \neq 0$, cu $|x| < 1$. Avem $f_n(x) = \frac{\sin(x^{2n})}{x^{2n}} x^n$ şi, cum $x^n \xrightarrow[n]{} 0$ iar $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, deducem $f_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$, pentru orice $x \in (-1,1)$. Pentru $x = 1$ se obţine $f_n(1) = \sin(1)$, iar dacă $x = -1$, şirul $f_n(-1) = (-1)^n \sin(1)$ nu are limită.

Dacă $|x| > 1$, atunci $|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(x^{2n})}{x^n}\right| \le \frac{1}{|x^n|} \xrightarrow[n]{} 0.$

În concluzie, funcția limită este $f: IR - \{1\} \to IR$, dată de:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in IR - \{\pm 1\} \\ \sin(1), & x = 1 \end{cases}.$$

Alegând șirul de puncte $x_n = \sqrt[2n]{\frac{\pi}{2}}\left(x_n = -\sqrt[2n]{\frac{\pi}{2}}\right)$ care tinde descrescător la 1 (respectiv, crescător la -1) când $n \to \infty$, pentru care avem $f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left(f_n(x_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right)$, se probează ușor faptul că nu are loc convergența uniformă pe $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Pe o submulțime de forma $(-\infty,-a] \cup [a,\infty)$, cu a>1, se obține, însă: $|f_n(x)| \le \frac{1}{|x|^n} \le \frac{1}{a^n} \xrightarrow[n]{} 0$, deci avem convergență uniformă.

Analog, cu alegerea $x_n = \sqrt[2n]{\frac{\pi}{4}}\left(x_n = -\sqrt[2n]{\frac{\pi}{4}}\right)$ demonstrăm că nu are loc convergența uniformă nici pe $(-1,1)$. Dacă $b \in (0,1)$ și $|x| \le b$, folosind inegalitatea $\sin|y| < |y|$, se deduce că $|f_n(x)| \le |x|^n \le b^n \xrightarrow[n]{} 0$, deci $(f_n)_n$ converge uniform la 0 pe $[-b,b]$.

Observație.

Concluziile negative de mai înainte, referitoare la intervalul $[0,\infty)$, rezultau și din faptul că funcțiile f_n sunt continue în x=1, iar limita f nu satisface această proprietate.

3. Să se găsească limita şirului de funcţii $\{f_n:[0,\infty)\to IR\}_{n\geq 2}$, $f_n(x)=\dfrac{2n^2x^2+nx+3n}{2n^2x+n-1}$ şi să se precizeze natura convergenţei.

Soluţie

Se observă că, pentru $x>0$, avem

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2x^2+nx+3n}{2n^2x+n-1}=x$, iar pentru $x=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n-1}=3$. Aşadar, limita şirului de funcţii este

$$f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 3, & x=0\end{cases}.$$

Nu putem avea convergenţă uniformă pe $[0,\infty)$, deoarece funcţiile f_n sunt continue în 0, în timp ce limita f nu este.

Totuşi, dacă $x\in[a,\infty)$, cu $a>0$, putem scrie

$|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{x+3n}{2n^2x+n-1}\leq\dfrac{x+3n}{2n^2x}\leq\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{3}{2na}\xrightarrow[n]{}0$, deci f_n converge uniform la f pe orice mulţime de forma $[a,\infty)$, cu $a>0$.

4. Să se demonstreze că şirul de funcţii $\{f_n:IR\to IR\}_{n\geq 1}$, $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{n}x)}{n^3+x^2}$ converge uniform pe IR, la $f(x)\equiv 0$.

Soluţie.

Fie $\varepsilon>0$. Alegem rangul $N(\varepsilon)=\left[\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{2\varepsilon}}\right]+1$. Atunci, folosind mărginirea funcţiei arctg, obţinem că, pentru orice $n>N(\varepsilon)$ şi orice

$x\in IR$, are loc in

convergența unifor

5. Se dă şir

Folosind criteriul lui

şirului.

Soluţie.

Avem, pentr

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar.

orice $n>N(\varepsilon)$ fixat

fi $x\in IR$, deci, co

uniform la o funcție

6. Fie şirul

găsească limita

convergenţei.

$x \in IR$, are loc inegalitatea $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2n^3} < \varepsilon$, ceea ce probează convergența uniformă a lui f_n către funcția nulă, pe IR.

5. Se dă şirul de funcții $\{f_n : IR \to IR\}_{n \in N^*}, f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2}$.
Folosind criteriul lui Cauchy, studiați convergența uniformă a şirului.

Soluție.

Avem, pentru orice $n \in IN^*$ fixat şi $p \in IN$ arbitrar:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}\right| \le \frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{|\sin(n+p)x|}{(n+p)^2} \le \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \text{ oricare ar fi } x \in IR.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Dacă alegem $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ vom avea pentru orice $n > N(\varepsilon)$ fixat şi $p \in IN$ arbitrar $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in IR$, deci, conform criteriului lui Cauchy, şirul $\{f_n\}$ converge uniform la o funcție $f : IR \to IR$.

6. Fie şirul de funcții $\{f_n : IR \to IR\}_{n \ge 2}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$. Să se găsească limita şirului şi să se probeze uniformitatea convergenței.

Soluție

Dacă $|x|<1$, atunci $1+x^{2n} \xrightarrow[n]{} 1$ și de aici $(1+x^{2n})^{1/n} \xrightarrow[n]{} 1^0 = 1$. Pentru $|x|>1$, vom avea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1+x^{2n}}{x^{2n}}} \sqrt[n]{x^{2n}} = x^2$, deoarece $\dfrac{x^{2n}+1}{x^{2n}} \xrightarrow[n]{} 1$. În sfârșit, $|x|=1$ conduce la $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Deci limita șirului va fi funcția:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \geq 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}.$$

Vom demonstra uniform convergența pe IR a șirului $\{f_n\}$, probând-o separat pe $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, respectiv $[-1,1]$.

Să presupunem că $|x|>1$. Are loc relația: $\sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 =$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+x^{2n}}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{1+x^{2n}}\right)^{n-2} x^2 + \cdots + \sqrt[n]{1+x^{2n}}\, x^{2n-4} + x^{2n-2}} < \frac{1}{n},$$

deoarece fiecare din termenii de la numitor este mai mare decât 1. Dacă $|x| \leq 1$, se poate scrie $0 < \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 < \sqrt[n]{2} - 1$. În ambele situații, convergența la 0 a șirurilor $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ respectiv $\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ va asigura, conform criteriului Weierstrass, uniformitatea convergenței lui f_n la f pe mulțimile menționate.

7. Să se studieze convergența șirului de funcții $\{f_n : [1,\infty) \to IR\}_{n\geq 0}$, $f_n(x) = \dfrac{x^3}{x^4+n^2}$.

Soluție.

Se observă

$x \in [1,\infty)$, deci limita

calculăm $\sup\limits_{x\geq 1} |f_n(x)$

$f_n'(x) = \dfrac{x^2(3n^2-x^4)}{(x^4+n^2)^2}$,

intervalul $[1,\infty)$. Cu

$x > x_n$, rezultă că x

$\sup\limits_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = f_n($

însă, că: $f_n \xrightarrow[n]{} f$,

8. Se dă ș

$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{n+x}, x \in [0 \\ 0, \quad x \in [\end{cases}$

converge uniform p

Soluție.

Fie $0 \leq x < 1$

orice $n \geq n_x$, inegal

Soluție

Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^3}{x^4+n^2}=0$, pentru orice $x\in[1,\infty)$, deci limita șirului este funcția $f(x)=0,\ x\in[1,\infty)$. Dorim să calculăm $\sup\limits_{x\geq 1}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\geq 1}\dfrac{x^3}{x^4+n^2}$. Pentru aceasta, avem $f_n'(x)=\dfrac{x^2\left(3n^2-x^4\right)}{\left(x^4+n^2\right)^2}$, de unde $x_n=\sqrt[4]{3n^2}$ este rădăcina derivatei în intervalul $[1,\infty)$. Cum $f_n'(x)>0$ pentru $x<x_n$ și $f_n'(x)<o$ pentru $x>x_n$, rezultă că x_n este punct de maxim global pentru f_n, deci $\sup\limits_{x\geq 1}|f_n(x)-f(x)|=f_n(x_n)=\dfrac{\sqrt{3}n\sqrt{n}}{4n^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}}\xrightarrow[n]{}0$. Aceasta implică, însă, că: $f_n\xrightarrow[n]{}f$, uniform pe $[1,\infty)$.

8. Se dă șirul de funcții $\{f_n:[0,1]\to \mathrm{IR}\}_{n\geq 1}$, definit prin $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{n+x}, & x\in\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]\\ 0, & x\in\left[\dfrac{n-1}{n},1\right]\end{cases}$. Să se demonstreze că șirul nu converge uniform pe $[0,1]$.

Soluție

Fie $0\leq x<1$. Alegând $n_x=\left[\dfrac{1}{1-x}\right]+1$, vom avea, pentru orice $n\geq n_x$, inegalitatea $x<\dfrac{n-1}{n}$, deci $f_n(x)=\dfrac{nx}{n+x}$. La limită se

obține: $\frac{nx}{n+x}\xrightarrow[n]{}x$. Pentru $x=1$, $f_n(1)=0$, $(\forall)n\geq 1$. Va rezulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

. În plus, dacă $x\in[0,1)$, avem:

$$|f_n(x)-x|=\begin{cases}\dfrac{x^2}{n+x}, & n\geq nx\\ x, & n<nx\end{cases}$$

și convergența nu este uniformă pe $[0,1]$.

9. Să se verifice, pentru exemplele de mai jos, aplicabilitatea teoremei de derivare termen cu termen a șirurilor de funcții:

a) $f_n:[-A,A]\to IR,\quad f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$, $A>0$, $n\geq 1$.

b) $f_n:[0,A]\to IR,\quad f_n(x)=e^{-nx}\cos(nx)$

Soluție.

a) Funcțiile f_n sunt derivabile pe domeniul comun de definiție și pentru $x_0=0\in[-A,A]$, $f_n(0)=0\xrightarrow[n]{}0$. Din faptul că

$$f_n'(x)=\frac{\cos\left(\frac{x}{n^2}\right)}{n}$$

rezultă: $|f_n'(x)|\leq\frac{1}{n},(\forall)x\in IR$, ceea ce implică, folosind criteriul lui Weierstrass, convergența uniformă a șirului derivatelor către funcția $g\equiv 0$. Aplicând teorema de derivare termen cu termen, găsim că f_n converge uniform pe $[-A,A]$ la o

funcție f, cu proprie

$f(0)=\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$, rez

Observație.

Se poate obțin

în care caz se va ilust

b) Avem $f_n($

convergent.

Funcțiile f_n au

se observă că $f_n'(0)=$

teorema nu este aplic

Observație.

Dacă se înlo

atunci se obține $|f_n'($

converge uniform la

remarcă în plus faptu

concluzia rămânând

B. Problem

1. Să se precizeze r

domeniul de definiție

a) $f_n:[2,\infty)\to IR,\quad f_n($

b) $f_n:IR\to IR,\quad f_n(x)$

funcție f, cu proprietatea $f'(x) = g(x) = 0$, deci $f(x) = C$. Cum $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, rezultă $f(x) = 0, \quad x \in [-A, A]$.

Observație.

Se poate obține aceeaşi concluzie dacă scriem $\sin\frac{|x|}{n^2} \le \frac{|x|}{n^2}$, în care caz se va ilustra ideea mărginirii domeniului de definiție.

b) Avem $f_n(0) = 1, \ (\forall) n \in IN$, deci $\{f_n(0)\}_n$ este şir convergent.

Funcțiile f_n au derivatele $f_n'(x) = -ne^{-nx}[\cos(nx) + \sin(nx)]$ şi se observă că $f_n'(0) = -n \to -\infty$, deci f_n' nu converge pe $[0, A]$ şi teorema nu este aplicabilă.

Observație.

Dacă se înlocuieşte intervalul $[0, A]$ cu $[a, A]$, $0 < a < A$, atunci se obține $|f_n'(x)| \le \frac{2n}{e^{na}}$, $(\forall) x \in [a, A]$, ceea ce ne arată că f_n' converge uniform la $g \equiv 0$, aplicarea teoremei fiind posibilă. Se remarcă în plus faptul că mărginirea lui $[a, A]$ nu mai este esențială, concluzia rămânând valabilă şi pentru intervalul $[a, \infty]$, $a > 0$.

B. Probleme propuse

1. Să se precizeze natura convergenței (simplă sau uniformă) pe domeniul de definiție pentru şirurile de funcții de mai jos:

a) $f_n : [2, \infty) \to IR, \quad f_n(x) = \frac{\ln n!}{n^x}$

b) $f_n : IR \to IR, \quad f_n(x) = (-1)^n 2^{n|x|}$

c) $f_n:[1,\infty)\to IR,\quad f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$

d) $f_n:[0,1]\to IR,\quad f_n(x)=x^n(1-x)$

e) $f_n:[0,\infty)\to IR,\quad f_n(x)=\dfrac{n^p x}{1+n^2x^2},p\in IR$

f) $f_n:[1,\infty)\to IR,\quad f_n(x)=\dfrac{x}{x^3+n^3}$

g) $f_n:IR-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\mid k\in Z\right\}\to IR,\quad f_n(x)=\dfrac{x}{1+(tgx)^{2n}}$

2. Să se arate că şirul de funcţii $f_n:(0,\infty)\to IR,\ f_n(x)=e^{-nx}\sin(n^2x)$ converge simplu pe intervalul $(0,\infty)$. Să se determine o mulţime de convergenţă uniformă.

3. Se dă şirul de funcţii $f_n:[0,1]\to IR$,

$$f_n(x)=\begin{cases}(n+1)x^n, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

. Folosind integrarea termen cu termen, arătaţi că $\{f_n\}$ nu converge uniform pe $[0,1]$. Să se găsească o submulţime a domeniului lui f pe care şirul converge uniform.

4. Fie $f_n:[a,b]\to IR$ un şir de funcţii monotone pe $[a,b]$, care converge simplu la o funcţie continuă $f:[a,b]\to IR$. Atunci $\{f_n\}$ converge uniform la f, pe $[a,b]$.

Răspunsu

1. a), d), f) - şirul
convergenţă e vi
neuniform; e) p<
convergent simpl

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases};$$

converge simplu la

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\bigcup_{k\in Z}\\ \dfrac{x}{2}, & x\in\bigcup_{k\in Z}\\ 0, & x\in\bigcup_{k\in Z}\end{cases}$$

2. pe $[a,\infty)$, $a>0$

3. pe $[0,a]$, $a<1$ ş

4. Indicaţie: se folo

Răspunsuri.

1. a), d), f) - şirul converge uniform la $f(x) \equiv 0$; b) mulţimea de convergenţă e vidă; c) şirul converge simplu la $f(x) = x$, dar neuniform; e) p<1 - uniform convergent la $f(x) \equiv 0$; $1 \leq p < 2$ - convergent simplu la $f(x) \equiv 0$; p=2 - convergent simplu la $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$; p>2 - şirul converge numai în $x = 0$; g) şirul converge simplu la

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{k \in Z} \left(k\pi - \frac{\pi}{4},\ k\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\ \frac{x}{2}, & x \in \bigcup\limits_{k \in Z} \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} \right\} \\ 0, & x \in \bigcup\limits_{k \in Z} \left(k\pi + \frac{\pi}{4},\ k\pi + \frac{3\pi}{4} \right) - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \end{cases}$$

2. pe $[a, \infty)$, $a > 0$ şirul converge uniform la $f(x) \equiv 0$.

3. pe $[0, a]$, $a < 1$ şirul converge uniform la $f(x) \equiv 0$.

4. Indicaţie: se foloseşte continuitatea uniformă a lui f pe $[a, b]$.

3.2. Serii de funcții. Serii de puteri

A. Probleme rezolvate

1. Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^3}$, $x \in IR$ este absolut convergentă și uniform convergentă pe IR.

Soluție.

Avem $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^3}$, $n \geq 1$. Folosind inegalitatea $\operatorname{arctg}|x| \leq |x|$ se obțin majorările:

$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{x^2+n^3} = \frac{2|x|n^{3/2}}{x^2+n^3}\frac{1}{2n^{3/2}} \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$, pentru orice $x \in IR$. Cum $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ este o serie convergentă, aplicând criteriul lui Weierstrass, vom deduce convergența uniformă și convergența absolută a seriei de funcții din enunț.

2. Să se studieze convergența simplă a seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$, $x \in IR$ și să se găsească o mulțime pe care seria converge uniform.

Soluție.

Folosind criteriul raportului, vom obține, pentru $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x/e^{(n+1)x}}{nx/e^{nx}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}e^{-x} = e^{-x}$.

De aici deducem că p

$e^{-x} > 1$, iar pentru x

În x=0 seria este în m

Se știe că pen

Vom putea scrie, astf

$|f_n(x)| = \frac{nx}{e^{nx}} < \frac{6nx}{(nx)^3} =$

În ipoteza că $x \in [$

$|f_n(x)| \leq \frac{6}{n^2a^2}$ și, cum s

Weierstrass, deduce

interval de forma $[a,\infty$

3. Se dă seria

i) Să se afle mulțim seriei.

ii) Pentru $x \geq 1$, să s

Soluție.

Se observă c

Dacă $x > 0$, vom av

serie geometrică cu

rezultă, folosind crit

convergentă pe $(0,\infty$

și, cum $f_n(0) \xrightarrow[n]{} 1 \neq$

De aici deducem că pentru $x<0$ seria este divergentă, deoarece $e^{-x}>1$, iar pentru $x>0$ seria este absolut convergentă ($e^{-x}<1$). În x=0 seria este în mod evident absolut convergentă.

Se ştie că pentru orice $u>0$ avem $e^{u}>\frac{u^{k}}{k!}$, $k\in IN$ arbitrar.

Vom putea scrie, astfel: $e^{nx}>\frac{(nx)^{3}}{3!}$, dacă $x>0$, de unde obţinem $|f_n(x)|=\frac{nx}{e^{nx}}<\frac{6nx}{(nx)^{3}}=\frac{6}{n^{2}x^{2}}$.

În ipoteza că $x\in[a,\infty)$, cu $a>0$, ajungem la inegalitatea $|f_n(x)|\le\frac{6}{n^{2}a^{2}}$ şi, cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ este convergentă, din criteriul lui Weierstrass, deducem convergenţa uniformă a seriei pe orice interval de forma $[a,\infty)$, $a>0$.

3. Se dă seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}\cos(n+2)x,\quad x\in IR$.

i) Să se afle mulţimea de convergenţă şi să se determine suma seriei.
ii) Pentru $x\ge1$, să se studieze convergenţa uniformă.

Soluţie.

Se observă că $|f_n(x)|=e^{-nx}|\cos(n+2)x|\le e^{-nx}$.

Dacă $x>0$, vom avea $e^{-x}<1$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}\right)^{n}$ este o serie geometrică cu raţia subunitară, deci convergentă, de unde rezultă, folosind criteriul comparaţiei, că $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este absolut convergentă pe $(0,\infty)$. În $x=0$ avem $f_n(0)=1$, oricare ar fi $n\ge0$ şi, cum $f_n(0)\xrightarrow[n]{}1\ne0$, seria este divergentă. Pentru $x<0$ avem

$e^{-nx} \xrightarrow[n]{} \infty$ şi, cum limita pentru $n \to \infty$ a lui $\cos(nx)$ nu există, cu excepţia lui x de forma $2k\pi$, $k \in Z$, seria este divergentă. Pentru $x > 0$ să notăm:

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\cos(n+2)x \text{ şi } S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\sin(n+2)x .$$

Atunci avem: $S(x) = S_1(x) + iS_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n [\cos x + i\sin x]^{n+2} =$

$$= \frac{(\cos x + i\sin x)^2}{1 - e^{-x}(\cos x + i\sin x)} = \frac{\cos(2x) + i\sin(2x)}{(1 - e^{-x}\cos x) - ie^{-x}\sin x} =$$

$$= \frac{[\cos(2x) + i\sin(2x)][(1 - e^{-x}\cos x) + ie^{-x}\sin x]}{(1 - e^{-x}\cos x)^2 + (e^{-x}\sin x)^2},$$ deoarece avem o serie geometrică cu raţia $e^{-x}(\cos x + i\sin x)$ de modul complex egal cu $e^{-x} < 1$. Partea reală a lui $S(x)$ este egală cu

$$S_1(x) = \frac{\cos(2x) - e^{-x}[\cos(2x)\cos x + \sin(2x)\sin x]}{1 - 2e^{-x}\cos x + e^{-2x}} =$$

$$= \frac{\cos(2x) - e^{-x}\cos x}{1 - 2e^{-x}\cos x + e^{-2x}}$$ şi reprezintă suma seriei de funcţii căutată.

Dacă presupunem că $x \ge 1$, vom avea $|f_n(x)| \le e^{-nx} \le e^{-n}$. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ e convergentă ca serie geometrică cu raţia $\frac{1}{e}$, din criteriul lui Weierstrass rezultă convergenţa uniformă a seriei pe intervalul $[1, \infty)$.

4. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, $x \in IR$, este convergentă, iar suma ei este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă.

Soluție.

Să notăm cu $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+x^2}$ șirul sumelor parțiale ale seriei . Pentru $n\in IN^*$, fixat și $p\in IN$, arbitrar se obține

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2+x^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2+x^2}\right|\le$$

$\le\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}$, oricare ar fi $x\in IR$. Aplicând criteriul Cauchy seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ pentru un $\varepsilon>0$ oarecare, vom găsi un $N(\varepsilon)$ astfel încât dacă $n>N(\varepsilon)$, $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$, $(\forall)x\in IR,(\forall)p\in IN$. De aici se deduce convergența uniformă a seriei de funcții pe IR către o funcție $S(x)$. Funcțiile $f_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}$ sunt derivabile, cu derivate continue pe IR. Cum $\left|f_n'(x)\right|=\frac{2|x|}{n^2+x^2}\cdot\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}$, $(\forall)x\in IR$, din criteriul Weierstrass obținem că $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ este uniform convergentă pe IR. Aplicând teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcții, se obține că $S(x)$ e derivabilă și $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=S'(x)$. În plus, $S'(x)$ este continuă, ca sumă a unei serii uniform convergente de funcții continue.

5. Să se studieze convergența seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$.

Soluție.

Cum $a_n = \frac{n^2}{n!}$, vom avea $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = 0$, de unde obținem că raza de convergență este ∞, deci seria este absolut convergentă pe IR și uniform convergentă pe orice interval de forma $[-a,a]$, $0 < a < \infty$.

6. Găsiți mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n \ln n}$.

Soluție.

Avem $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln n}} = \frac{1}{3}$, deoarece $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ iar $\sqrt[n]{\ln n}$ are aceeași limită pentru $n \to \infty$ ca și $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$, adică 1. Va rezulta, conform teoremei Cauchy-Hadamard, că raza de convergență este R=3, deci seria converge absolut pe $(-3,3)$. Studiem convergența în capetele intervalului. Pentru $x = 3$ avem seria numerică $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ care este divergentă, concluzie care poate fi obținută folosind criteriul integral al lui Cauchy. Dacă $x = -3$, seria devine $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ și observăm că sunt satisfăcute condițiile din criteriul de convergență al lui Leibniz: $\frac{1}{n\ln n} > 0$ este șir descrescător (deoarece $(x\ln x)' = \ln x + 1 > 0$, pentru $x > \frac{1}{e}$) și

convergent la zero. Î
de puteri este interv

7. Să se stu

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(x+1)^{2n}}{(4n+1)^2}$.

Soluție.

Avem $a_{2n} =$

calcula

$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{}$

astfel încât raza

$x = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau x

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(4n+1)^2}$, care

convergentă).

În concluzie

convergentă pe m

$\left(-\infty,-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(-\right.$

convergent la zero. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei de puteri este intervalul $[-3,3)$.

7. Să se studieze convergența seriei de puteri
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(x+1)^{2n}}{(4n+1)^2}.$$

Soluție.

Avem $a_{2n} = \dfrac{2^{n-1}}{(4n+1)^2}$ și $a_{2n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Vom calcula
$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^{n-1}}{(4n+1)^2}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{4n}}} = \sqrt{2},$$
astfel încât raza de convergență va fi $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pentru $x = -1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se obține aceeași serie numerică, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(4n+1)^2}$, care este convergentă (comparație cu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, convergentă).

În concluzie, conform teoremei lui Abel, seria este absolut convergentă pe mulțimea $\left[-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și divergentă pe $\left(-\infty, -1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

Observație.

Aceeaşi concluzie se putea obține făcând substituția $y = (x+1)^2$ şi găsind raza de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} y^n}{(4n+1)^2}$ cu ajutorul criteriului raportului.

8. Pentru ce valori $x \in \mathrm{IR} - \{-1\}$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ este convergentă?

Soluție.

Vom face substituția $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$, problema reducându-se la studiul convergenței seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) y^n$ pe mulțimea $\mathrm{Im}\varphi$, unde $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$. Seria în y are raza de convergență egală cu 1, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{3n+1} = 1$. Din $y = \frac{x-1}{x+1}$ se deduce $x = \frac{y+1}{1-y}$, de unde rezultă că $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{IR} \setminus \{1\}$. Observăm că $[-1,1] \cap \mathrm{Im}\varphi = [-1,1)$. Pentru $y = -1$, seria de puteri este divergentă, deoarece şirul $(-1)^n (3n+1)$ nu are limită. Rămâne să determinăm valorile lui x pentru care $-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$. Aceste inegalități sunt echivalente cu $\frac{2}{x+1} > 0$ şi $\frac{2x}{x+1} > 0$. Astfel se obține

$x \in (-1, \infty) \cap [(-\infty, -1) \cup (0, \infty)] = (0, \infty)$, deci seria de funcții din enunț converge pe mulțimea $(0, \infty)$.

9. Folosind deri[...]
se calculeze sumele se[...]

a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}$ [...]

b) $1 - 3x^2 + 5x^4 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}$ [...]

Soluție.

a) Raza de con[...]

$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}} = 1$, de[...]

verifică uşor că în $x =$ [...]

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$). Prin derivare te[...]

$+ x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, care [...]

Dacă notăm cu $S(x)$ s[...]
derivare termen cu [...]

$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. [...]

(argth este funcția [...]

$\mathrm{th}(0) = 0$, rezultă $c = $ [...]

demonstra că $\mathrm{argth}\, x =$ [...]

9. Folosind derivarea sau integrarea termen cu termen, să se calculeze sumele seriilor de puteri de mai jos:

a) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

b) $1-3x^2+5x^4-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

Soluție.

a) Raza de convergență a seriei este $R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=$

$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}}=1$, deci seria este convergentă pe $(-1,1)$. Se verifică ușor că în $x=1$ și $x=-1$ seria diverge (comparație cu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$). Prin derivare termen cu termen se obține seria $1+x^2+$ $+x^4+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, care este o serie geometrică cu rația $x^2\in(0,1)$. Dacă notăm cu $S(x)$ suma seriei inițiale pe $(-1,1)$, din teorema de derivare termen cu termen a seriilor de puteri obținem $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$. De aici deducem că $S(x)=\operatorname{arg\,th}x+c$ ($\operatorname{arg\,th}$ este funcția inversă lui $\operatorname{th}=\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$). Cum $S(0)=0$ și $\operatorname{th}(0)=0$, rezultă $c=0$, deci $S(x)=\operatorname{arg\,th}x, x\in(-1,1)$ (Se poate demonstra că $\operatorname{arg\,th}x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$).

b) Deoarece

$\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n-2]{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n-2]{2n-2}\,\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n-2}\right)^{\frac{1}{2n-2}}=1$, raza de convergență a seriei va fi $R=1$. Seria este, clar, divergentă în ± 1. Prin integrare termen cu termen pe intervalul închis $[0,u]$, $0<u<1$, vom obține seria de puteri $u-u^3+u^5-u^7+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u^{2n-1}$, a cărei sumă este $\frac{u}{1+u^2}$.

Derivând suma de mai înainte, obținem $\left(\frac{u}{1+u^2}\right)'=\frac{1-u^2}{\left(1+u^2\right)^2}$ și rezultă că suma seriei inițiale va fi $\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, pe intervalul $(-1,1)$.

B. Probleme propuse

1. Pentru seriile de funcții de mai jos, determinați mulțimile de convergență, precum și natura convergenței:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^3+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{e^{nx}}$; d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n\sin x}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos(nx)}{n}$, $|a|<1$; f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5}{n^2+4n+3}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^n$, $x\neq\frac{1}{2}$;

Răspunsuri.

a), b), e) uniform convergentă pe IR; c) absolut convergentă pe $(0,\infty)$, divergentă în rest; d) absolut convergentă

pe $\bigcup_{k\in Z}(2k\pi,(2k+1)\pi)$, divergentă în rest; f) absolut convergentă pe $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,\infty)$, divergentă în rest.

2. Arătați că seriile de funcții de mai jos converg pe mulțimile specificate, iar sumele lor sunt funcții derivabile cu derivate continue:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}$, $x\in IR$, $\alpha>2$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}\sin(nx)$, $x\geq 1$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n^2}\right)$, $x\in IR$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n}$, $x\in IR$;

3. Să se determine mulțimile de convergență ale seriilor de puteri de mai jos:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2x^n$ R: $(-1,1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ R: $[-1,1)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{x^{3n+1}}{n+1}$ R: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ R: $(-7,-3)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ R: $(-2e,2e)$

f) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$ R: $(1,3]$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ R: IR

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-2)^n\right]x^n$ R: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n\cdot 3^n}$, $z\in \mathbf{C}$ R: $|z-i|<3$

j) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$, $z\in \mathbf{C}$ R: $|z|<\sqrt{2}$

4. Să se determine mulțimile de convergență și sumele pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{2^n}{3^n}x^n$

Răspunsuri:

a) $[-1,1)$, $S(x)=\ln\frac{1}{1-x}$; b) $[-1,1]$, $S(x)=\operatorname{arctg}x$;

c) $(-1,1)$, $S(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$; d) $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $S(x)=\frac{6x}{(3-2x)^2}$.

3.3. Serii Taylor

A. Probleme rezolvate

1. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $a=0$, funcția $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$, $f(x)=\sin x$.

Soluție.

Funcția $f(x)=\sin x$ este indefinit derivabilă pe IR.

Într-adevăr, $(\sin)'(x)=\cos x$, $(\sin)''(x)=-\sin x$, $(\sin)^{(3)}(x)=-\cos x$, $\sin^{(4)}(x)=\sin x$, etc.

Prin inducție se poate demonstra ușor că, în general, pentru orice $k\geq 0$, $(\sin)^{2k}(x)=(-1)^k\sin x$ și $(\sin)^{2k+1}(x)=(-1)^k\cos x$.

Va rezulta că $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}$

și deci seria Taylor asociată lui f în punctul 0 va fi de forma: $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+3)!}{1/(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0$, vom avea și

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}=0$, de unde rezultă că raza de convergență a seriei este $R=\infty$. Să demonstrăm că suma seriei Taylor este tocmai $f(x)$. Alegem o constantă arbitrară $M>0$ și un argument x astfel încât $|x|\leq M$. Restul Taylor de ordin n, scris sub forma lui Lagrange, va fi $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin^{(n+1)}(\xi)$, cu ξ cuprins între 0 și x. Deoarece $\left|(\sin)^{(n)}(u)\right|\leq 1$, oricare ar fi $u\in IR$, vom avea $|R_n(x)|\leq\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ și, cum $\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n]{}0$, rezultă că $R_n(x)$ converge la 0 pentru orice $x\in[-M,M]$; deci $f(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x)$, $|x|\leq M$, unde $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. M fiind oarecare, se obține dezvoltarea în serie: $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in IR$.

2. Să se găsească dezvoltarea în serie Maclaurin a funcției $f:(-1,\infty) \to IR$, $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in IR$.

Soluție.

Funcția f este indefinit derivabilă pe $(-1,\infty)$ ca o compunere de două funcții indefinit derivabile: $x \to x+1$ pe $(-1,\infty)$ și $x \to x^{\alpha}$ pe $(0,\infty)$. Se obține:

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ și, în general,

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, așa cum rezultă folosind inducția matematică. Deci $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ și seria Maclaurin este: $f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

Pentru această serie avem $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\alpha}{n+1}=1$, deci raza ei de convergență este egală cu 1, oricare ar fi $\alpha \in IR$. Restul de ordinul n sub forma lui Cauchy este:

$R_n(x)=\frac{x(x-\xi_n)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi_n)^{\alpha-n-1}$, cu ξ_n între 0 și x,

care, cu notația $\xi_n=\theta_n x$, $0<\theta_n<1$, devine:

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta_n x)^{\alpha-n-1}(1-\theta_n)^n x^{n+1}.$$

Rearanjând factorii produsului, obținem:

$$R_n(x)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)x^n}{n!}\alpha x(1+\theta_n x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right)^n.$$

Se observă că $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)x^n}{n!}$ este termenul general al seriei Maclaurin asociate funcției $(1+x)^{\alpha-1}$ și, cum

aceea este converge
va tinde la zero când
$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}<|\alpha x(1+$
cu sensul schimbat
$\theta_n \in (0,1)$ și $x \in (-1,1)$
Va rezulta astfel că
este valabilă dezvolt
$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-}{}$
numește *serie binom*
de mai sus devine fo

Observație

Relativ la vali
intervalului $(-1,1)$, se
- Pentru $\alpha \ge 0$, s
$x=\pm 1$ (conform cri
funcție continuă în
capetele intervalului
- dacă $-1<\alpha<0$,
egalitatea este vala
Raabe);
- dacă $\alpha \le -1$, ser
criteriul necesar de c

3. Să se dez
$f(x)=\sqrt{2+x}$.

aceea este convergentă pentru orice $x \in (-1,1)$, factorul menţionat va tinde la zero când $n \to \infty$. De asemenea, au loc inegalităţile: $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} < |\alpha x(1+\theta_n x)|^{\alpha-1} < |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$, dacă $\alpha \geq 1$, (respectiv cu sensul schimbat dacă $\alpha < 1$) şi $0 < \dfrac{1-\theta_n}{1+\theta_n x} < 1$, în ipotezele $\theta_n \in (0,1)$ şi $x \in (-1,1)$, de unde şi $0 < \left(\dfrac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right)^n < 1$, $(\forall) n \geq 1$.

Va rezulta astfel că $|R_n(x)| \xrightarrow[n]{} 0$ pentru orice $x \in (-1,1)$, adică este valabilă dezvoltarea:

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $|x| < 1$. Seria obţinută se numeşte *serie binomială*, deoarece, dacă $\alpha = m$, $m \in \mathrm{IN}$, formula de mai sus devine formula binomului lui Newton.

Observaţie.

Relativ la validitatea dezvoltării obţinute anterior în capetele intervalului $(-1,1)$, se pot demonstra următoarele:

- Pentru $\alpha \geq 0$, seria de puteri este absolut convergentă în $x = \pm 1$ (conform criteriului Raabe-Duhamel) şi, cum $(1+x)^\alpha$ este funcţie continuă în $x=1$ şi $x=-1$, egalitatea este valabilă şi în capetele intervalului;
- dacă $-1 < \alpha < 0$, seria converge în $x=1$ şi diverge în $x=-1$ şi egalitatea este valabilă în $x=1$ (se folosesc criteriile Leibniz şi Raabe);
- dacă $\alpha \leq -1$, seria diverge în $x=1$ şi $x=-1$ (nu este îndeplinit criteriul necesar de convergenţă).

3. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f:(-2,\infty) \to \mathrm{IR}$, $f(x) = \sqrt{2+x}$.

Soluție.

Observăm că $f(x)=[1+(x+1)]^{\frac{1}{2}}$, ceea ce ne sugerează folosirea seriei binomiale cu $\alpha=\frac{1}{2}$, în ipoteza $-1<x+1<1$, adică pentru $x\in(-2,0)$. Notând $y=x+1$, se obține:

$$(1+y)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}y+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+\dots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}y^n+$$

$$+\dots=1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2^2 2!}y^2+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}y^n+\dots$$

Revenind la x, vom avea:

$$\sqrt{2+x}=1+\frac{1}{2}(x+1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(x+1)^n,\ x\in(-2,0),$$

dezvoltarea fiind valabilă şi pentru $x=-2$ şi $x=0$, deoarece $\alpha=\frac{1}{2}\geq 0$. De exemplu, pentru $x=0$, primii şase termeni dau:

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}=1{,}426.$$

4. Să se dezvolte în serie Taylor, în jurul punctului $a=0$, funcția $f:\mathrm{IR}\setminus\{-2,-3\}\to\mathrm{IR}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+5x+6}$.

Soluție.

Descompunând funcția rațională f în fracții simple, se ajunge la:

$$\frac{3x}{x^2+5x+6}=-\frac{6}{x+2}+\frac{9}{x+3}.$$

Dar, $\frac{6}{x+2}=\frac{3}{1+\frac{x}{2}}=3\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{2^n}+\cdots\right]$, pentru $|x|<2$ şi

$\frac{9}{x+3}=\frac{3}{1+\frac{x}{3}}=3\left[1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{3^n}+\cdots\right]$, pentru $|x|<3$.

Pe domeniul comun de convergenţă al celor două serii de mai sus, care este mulţimea $(-2,2)$, vom putea scrie:

$$\frac{3x}{x^2+5x+6}=3\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)x^2+\cdots+(-1)^n\left(-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n+\cdots\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}3(-1)^n\left(-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n.$$

5. Să se dezvolte funcţia $f:(-1,\infty)\to IR$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ în serie de puteri ale lui $\frac{x}{1+x}$.

Soluţie.

Dacă notăm $y=\frac{x}{1+x}$ vom avea $x=\frac{y}{1-y}$ şi se observă că $y<1$ pentru orice $x>-1$. Substituind pe x în expresia lui f găsim următoarea funcţie de y:

$$g(y)=\frac{y/(1-y)}{\sqrt{1+y/(1-y)}}=\frac{y}{\sqrt{1-y}}=-\sqrt{1-y}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}.$$

Pentru valori ale lui y cuprinse între -1 şi 1, vom putea folosi dezvoltări în serii binomiale cu $\alpha=\frac{1}{2}$, respectiv $\alpha=-\frac{1}{2}$.

Astfel, vom putea scrie:

$$\sqrt{1-y}=(1-y)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3+\dots+$$

$$+(-1)^n\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}y^n+\dots=$$

$$=1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2^2\cdot 2!}y^2-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}y^3-\dots+\frac{(-1)^{2n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}y^n+\dots .$$

În mod asemănător, avem:

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=(1-y)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}y+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3+\dots+$$

$$+(-1)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}y^n+\dots=$$

$$=1+\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}y^3+\dots+\frac{(-1)^{2n}1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}y^n+\dots$$

De aici rezultă:

$$g(y)=y+\frac{1}{2^2\cdot 2!}[1+3]y^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}[1+5]y^3+\dots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}[1+(2n-1)]y^n+\dots=y+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}y^n.$$

Cum pentru $y=\frac{x}{1+x}$ avem $g(y)=f(x)$, se obține:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n.$$

Condiția $y > -1$ va impune $x > -\frac{1}{2}$. Dezvoltările în serie binomială de mai sus fiind valabile şi în $y = -1$, egalitatea va fi adevărată pentru $x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

6. Să se găsească dezvoltarea în serie Maclaurin a funcției lui Gauss, $G:[0,\infty) \to IR$, $G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Cu ajutorul ei, să se calculeze G(1) cu o eroare mai mică decât 0,0001.

Soluție.

Ne vom folosi de dezvoltarea în serie Maclaurin a funcției e^x, valabilă pe IR: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Prin înlocuirea lui x cu $-t^2$ se obține dezvoltarea:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \cdots, \quad t \in IR.$$

Prin integrarea termen cu termen a seriei de puteri de mai sus între 0 şi x, se ajunge la egalitatea:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad x \in IR,$$

deci $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$.

De aici se deduce că

$$G(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} R_n.$$

Seria obținută pentru x=1 fiind o serie alternată satisfăcând condițiile criteriului Leibniz, avem $|R_n| < \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$.

Trebuie găsit aşadar cel mai mic n natural pentru care $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}<10^{-4}$. Pentru n=5 avem $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{6!\cdot 13}=0{,}00012$ şi pentru n=6, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{7!\cdot 15}=0{,}000015$. Vom alege deci n=6 şi obţinem

$$G(1)\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{4!9}-\frac{1}{5!11}+\frac{1}{6!13}\right]=0{,}8427,$$

valoare care reprezintă o aproximare cu o eroare inferioară lui 10^{-4}.

B. Probleme propuse

1. Să se găsească dezvoltările în serie Taylor în x=0 ale funcţiilor de mai jos, specificând mulţimile pe care sunt valabile:

a) $f(x)=\cos x$ **R**: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in IR$

b) $f(x)=\operatorname{arcctg}x$ **R**: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in[-1,1]$

c) $f(x)=\arcsin x$ **R**: $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $x\in(-1,1)$

d) $f(x)=sh(x)$ **R**: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in IR$

e) $f(x)=xe^{-2x}$ **R**: $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}$, $x\in IR$

f) $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ **R**: $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$, $x\in(-1,1)$

g) $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ **R**: $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n(4n+1)n!}x^{4n+1}$, $x\in(-1,1)$.

2. Să se dezvolte funcția $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ în serie Taylor, în jurul punctului $x_0 = -4$.

R: $-78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3$.

3. Cu ce precizie se calculează numărul $\frac{\pi}{4}$ cu ajutorul primilor cinci termeni ai seriei $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ dacă x ia valoarea 1?

R: err $< 0{,}091$.

4. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3}.

R: $0{,}621$.

5. Să se scrie primii trei termeni nenuli ai dezvoltării în serie de puteri ale lui x pentru funcțiile de mai jos:

a) $f(x) = \mathrm{tg}x$ **R**: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

b) $f(x) = \ln\cos x$ **R**: $-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45}\right)$

c) $f(x) = \sec x$ **R**: $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$.

4

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Autor: lector.dr. IFTIMIE BOGDAN

4 FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

4.1. Domeniu de definiție. Limite. Continuitate

A. Probleme rezolvate

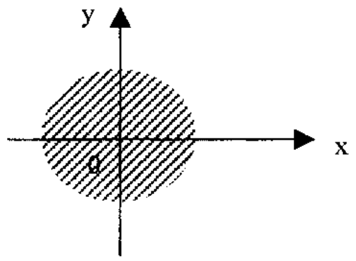
1. Să se determine domeniul maxim de definiție pentru funcțiile:

a) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Soluție

Trebuie pusă condiția: $1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$

$D_{max} = \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ (interiorul cercului cu centrul în origine și rază 1).



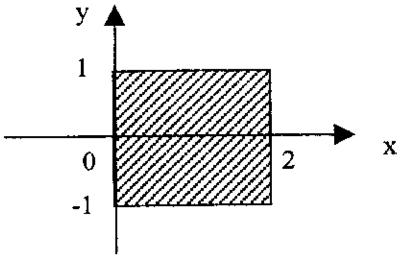
b) $f(x,y) = \sqrt{1-|x-1|} + \sqrt{1-|y|}$

$D_{max} = \{(x, y) \in IR^2 / |x-1| \le 1, |y| \le 1\}$

$|x-1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

$|y| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$

Așadar, $D_{max} = \{(x, y) \in IR^2 / 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\} =$
$= [0,2] \times [-1,1]$ (pătratul din figură cu interiorul său)



c) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

$D_{max} = \{(x,y)/\sin(x^2+y^2) \geq 0\} = \bigcup\limits_{k\geq 0} \{(x, y)/2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq$

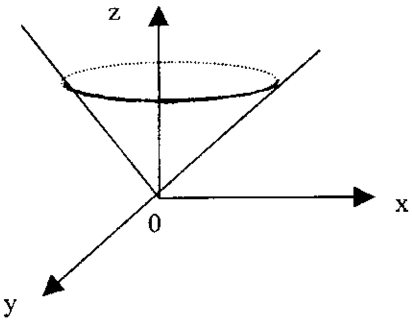
$\leq (2k + 1)\pi\}$

Domeniul maxim de definiție este format din mulțimea punctelor aparținând unei familii de coroane circulare.

d) $f(x,y,z) = \ln z + \sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$

$D_{max} = \{(x, y, z) / z > 0 \;\; z^2 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

Ecuația $x^2 + y^2 = z^2$ definește în spațiu tridimensional o suprafață conică. Domeniul de definiție este format din punctele interioare și de pe suprafața conului $x^2 + y^2 = z^2$, cu excepția originii.



e) $f(x, y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$

$D_{max} = \{(x, y) \in IR^2 / x \neq 0, \left|\dfrac{y}{x}\right| < 1\} = \{(x, y) \in IR^2 / x \neq 0,$

$|y| < |x|\}$

$|y| < |x| \Leftrightarrow - |x|$

Domeniul de c
cuprins între dreptel
exceptând originea (

2. Fie f: IR \ {0

Să se determi
existența limitei func

Soluție

Fie φ (x) = lim

a) x = 0 ⇒ lim

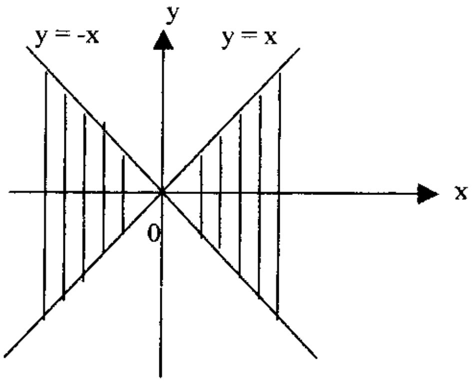
b) x ≠ 0 ⇒ lim

Deci φ (x) =

Atunci lim (lim

$|y| < |x| \Leftrightarrow - |x| < y < |x| \Leftrightarrow -x \le y \le x,\ x > o$

sau $x \le y \le - x,\ x < 0$



Domeniul de definiție este alcătuit din partea planului x o y cuprins între dreptele y = -x, y = +x și care conține dreapta 0x, exceptând originea (porțiunea hașurată).

2. Fie f: IR \ {0, 0} , definită prin: $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Să se determine limitele iterate în origine și să se cerceteze existența limitei funcției în origine.

Soluție

Fie $\varphi (x) = \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$

a) $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = \lim\limits_{y \to 0} (-1) = -1$

b) $x \ne 0 \Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{y \to 0} 1 = 1$

Deci $\varphi (x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 1, & x \ne 0 \end{cases}$

Atunci $\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \ne 0}} \varphi (x) = 1$

Fie $\Psi(y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$. Distingem cazurile:

a) $y = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

b) $y \neq 0$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$

Aşadar $\Psi(y) = \begin{cases} -1, & y = 0 \\ 1, & y \neq 0 \end{cases}$

Rezultă că $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} \Psi(y) = -1$

Aşadar limitele iterate în origine există, dar sunt diferite (iau valorile 1 şi –1), deci nu există limita funcţiei în punctul (0, 0).

Dacă această limită ar fi existat, atunci ar fi existat şi limitele iterate şi acestea ar fi fost egale.

Cele două limite iterate există, însă sunt diferite.

Pentru a arăta direct că nu există limita funcţiei în origine, vom considera şiruri diferite, (x_n), (y_n), ce converg la 0.

Fie $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{\alpha}{n}$; $\alpha \in IR^*$

Atunci $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \dfrac{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\alpha^2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha^2}{n^2}} = \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) =$

$= \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$

Pentru $\alpha = 1$, $\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = 0$ şi pentru $\alpha = 2$, $\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = -\dfrac{3}{5}$

Cele două valori diferă, deci funcţia nu are limită în (0, 0)

3. Să se cerceteze existenţa limitelor iterate pentru funcţia

$f: IR \times IR^* \to IR$, $f(x, y) = x \cdot \cos\dfrac{1}{y}$

Soluţie

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow (\exists)\ \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0$$

Nu există $\lim\limits_{y\to 0}\cos\dfrac{1}{y}$, deci nu există $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ şi nici $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$.

În această situaţie funcţia f nu admite limită în origine.

4. Fie funcţia f: $(0, \infty)^2 \to$ IR, $f(x, y) = x\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{x+y}$

Să se decidă existenţa limitelor în punctul (0, 0).

Soluţie

Fie $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = x\sin\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{x+y} = x\sin\dfrac{1}{x}$

Atunci $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$

Fie $\Psi(y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x+y} = 0 + \dfrac{y}{y} = 1$

Deducem : $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{y\to 0}(\Psi(y)) = \lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$

Există cele două limite iterate dar nu sunt egale, deci f nu are limită în punctul (0, 0)

5. Să se arate că funcţia f: $IR^2 \setminus \{(x, y) / y^2 \neq 2x\} \to$ IR,

$f(x,y) = \dfrac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ nu are limită în origine

Soluție

Vom considera șirurile (x_n), (y_n) convergente la 0, de forma:
$x_n = \frac{\alpha}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$

Pentru ca f să fie bine definită, în perechea (x_n, y_n), impunem: $y_n^2 \neq 2x_n \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \neq \frac{2\alpha}{n} \Leftrightarrow 2\alpha n \neq 1$ (pentru $\alpha = 0$ este adevărat; dacă $\alpha \neq 0$, considerăm șirul (x_n) pentru $n \geq N$,

unde $N = \left[\frac{1}{2\alpha}\right] + 1$)

Atunci, $f(x_n, y_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2} + \frac{2\alpha}{n}}{\frac{1}{n^2} - \frac{2\alpha}{n}} = \dfrac{1 + 2\alpha \cdot n}{1 - 2\alpha \cdot n}$

Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 1$

Dacă $\alpha \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{2\alpha}{-2\alpha} = -1$

Pentru șiruri diferite care converg la 0 am obținut valori diferite pentru $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$, deci f nu are limită în origine.

6. Să se arate că funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă în tot planul.

Soluție

Pentru punctele (x_0, y_0) ce satisfac condiția $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, fie $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ arbitrare.

Deoarece $x_0^2 + y_0^2 \neq 0 \Rightarrow$ fie $x_0 \neq 0$, fie $y_0 \neq 0$.

Să presupunem $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ există un rang N astfel încât $x_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq N$

Atunci, pentru $n \geq N$ avem: $x_n^2 + y_n^2 \neq 0$ şi deci:

$f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n^2 y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{x_0^2 y_0^3}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)$, relaţie ce ne spune că f este continuă în (x_0, y_0).

Să studiem acum continuitatea în punctul (0, 0).

Fie şirurile arbitrare (x_n), (y_n) convergente la 0.

$$|f(x_n, y_n)| = \left|\frac{x_n^2 y_n^3}{x_n^2 + y_n^2}\right| = \frac{|x_n|^2 |y_n|^3}{|x_n|^2 + |y_n|^2} = \frac{2|x_n||y_n|}{|x_n|^2 + |y_n|^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x_n| \cdot |y_n|^2$$

Folosind inegalitatea $2ab \leq a^2 + b^2$ adevărată pentru orice numere reale a, b, relaţie echivalentă cu $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1$, deducem:

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{1}{2}|x_n||y_n|^2$$

Dar $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $|y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}|x_n||y_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0, 0)$, relaţie ce exprimă continuitatea lui f în (0, 0).

7. Să se cerceteze continuitatea funcţiei

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Soluţie

În punctele (x_0, y_0) cu $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ funcţia este evident continuă.

Fie $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şiruri oarecare

$$f(x_n, y_n) = \frac{\sin(x_n^3 + y_n^3)}{x_n^2 + y_n^2} \Rightarrow |f(x_n, y_n)| = \frac{|\sin(x_n^3 + y_n^3|}{|x_n|^2 + |y_n|^2} \leq$$

$$\leq \frac{|x_n^3 + y_n^3|}{|x_n|^2 + |y_n|^2} \leq \frac{|x_n|^3 + |y_n|^3}{|x_n|^2 + |y_n|^2} \leq |x_n| + |y_n|$$

Am folosit inegalitatea $|\sin x| \leq |x|$, adevărat pentru orice $x \in IR$, inegalitatea modulului, precum şi inegalitatea $a^3 + b^3 \leq (a+b)(a^2 + b^2)$, valabilă pentru $\forall$ a, b pozitive.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} (|x_n| + |y_n|) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ există şi este egală cu 0 = f(0, 0). Cum şirurile au fost alese arbitrar, rezultă că f e continuă în (0, 0).

B. Probleme propuse

1. Să se determine domeniul de definiţie pentru următoarele funcţii, dând eventual şi interpretare geometrică:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

R. $D_{max} = \left\{(x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

b) $f(x, y) = \ln(y - x^2)$

R. $D_{max} = \{(x, y) / y - x^2 > 0\}$

c) $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

R. $D_{max} = \left\{(x, y, z) / -\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$

d) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$

R. $D_{max} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$

e) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$

R. $D_{max} = \{(x, y) / x \ge 0, y \ge 0, x^2 \ge y\}$

f) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}\ln(1 - y^2)$

R. $D_{max} = [-2, 2] \times (-1, 1)$

g) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$

R. $D_{max} = \{(x, y)/x + y + 1 \ge 0, x + y - 1 \le 0\}$

h) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

R. $D_{max} = \{(x, y)/y^2 > 4x - 8\}$

2. Să se arate că funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă separat, dar nu este continuă în (0, 0)

3. Să se decidă existența limitei funcției

$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \ne (0, 0)$, în origine.

4. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$

R. 0

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

R. 2

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\cdot x^2\cdot y^2}$

R. Nu există

5. Să se cerceteze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

R. Nu este continuă în origine

b) $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & x>0, y>0\\ 1, & x=y=0\end{cases}$

R. Este continuă pe domeniul de definiție

c) $f(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

R. este continuă pe IR^2

d) $f(x,y)=\begin{cases}xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

R. Este continuă pe IR^2

e) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } x=y=0\end{cases}$

R. Este continuă pe IR^2

f) $f(x,y)=\begin{cases}x^2\ln(x^2+y^2), & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

R. Este continuă pe IR^2

4.2. Deriv… funcți… Deriv… Taylo… variab…

A. Probleme

1. Fie funcția f(…

de la definiție: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ …

Soluție

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(\ldots}{\ldots}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\ldots}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(\ldots}{\ldots}$

$=\lim\limits_{y\to 1}\frac{1}{y-1}\ln\frac{1+\ldots}{2}$

$=\ln\left[\lim\limits_{y\to 1}\left(1+\frac{y^2\ldots}{2}\right.\right.$

2. Fie funcția …

calculeze derivatele p…

4.2. Derivate parțiale. Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile. Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

A. Probleme rezolvate

1. Fie funcția $f(x, y) = \ln(1 + xy^2)$. Să se calculeze, pornind de la definiție: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

Soluție

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\ln\left[\lim_{x\to1}\left(1+\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{x-1}}\right]^{\frac{1}{2}}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\lim_{y\to1}\frac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{\ln(1+y^2)-\ln 2}{y-1}=$$

$$=\lim_{y\to1}\frac{1}{y-1}\ln\frac{1+y^2}{2}=\ln\left(\lim_{y\to1}\left(\frac{1+y^2}{2}\right)^{\frac{1}{y-1}}\right)=$$

$$=\ln\left[\lim_{y\to1}\left(1+\frac{y^2-1}{2}\right)^{\frac{2}{y^2-1}\cdot\frac{y+1}{2}}\right]=\ln e=1$$

2. Fie funcția $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f: IR^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Să se calculeze derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$,

dacă $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

Soluție

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y_0^2}}-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x\sqrt{x_0^2+y_0^2}-x_0\sqrt{x^2+y_0^2}}{(x-x_0)\sqrt{x^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2(x_0^2+y_0^2)-x_0^2(x^2+y_0^2)}{(x-x_0)\left(x\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0\sqrt{x^2+y_0^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)}\cdot\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{y_0^2(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)}=$$

$$=\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)}\cdot\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot 2x_0y_0^2=\frac{y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y^2}}-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}}{(y-y_0)}=$$

$$=\frac{x_0}{(x_0^2+y_0^2)}\cdot\lim_{y\to y_0}\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-\sqrt{x_0^2+y^2}}{y-y_0}=$$

$$=\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\cdot\lim_{y\to y_0}\frac{(y_0^2-y^2)}{(y-y_0)\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\sqrt{x_0^2+y^2}\right)}=$$

$$=\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\cdot\left(-\frac{2y_0}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)=-\frac{x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. Să se calcule[z]

următoarele funcții:

a) $f(x, y) = e^{\sin\frac{y}{x}}$

b) $f(x, y) = \sqrt{xy+\ldots}$

c) $f(x, y, z) = e^{xz}\ldots$

Soluție

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\Big(\ldots$

$= -e^{\sin\frac{y_0}{x}}\cdot\cos\ldots$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\Big(e^{\ldots}$

$=\frac{1}{x_0}e^{\sin\frac{y_0}{x_0}}\cdot\cos\ldots$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\Big(\ldots$

$=\frac{1}{2\sqrt{xy_0+\frac{x}{y_0}\ldots}}$

3. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = e^{\sin\frac{y}{x}}$

b) $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

c) $f(x, y, z) = e^{xz}\sqrt{x^2 + y^2}$

Soluție

a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(e^{\sin\frac{y_0}{x}}\right)'\Big|_{x=x_0} = e^{\sin\frac{y_0}{x}} \cdot \cos\frac{y_0}{x} \cdot \left(-\frac{y_0}{x^2}\right)\Big|_{x=x_0} =$$

$$= -e^{\sin\frac{y_0}{x}} \cdot \cos\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_0^2}{x_0^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(e^{\sin\frac{y}{x_0}}\right)'\Big|_{y=y_0} = e^{\sin\frac{y}{x_0}} \cdot \cos\frac{y}{x_0} \cdot \frac{1}{x_0}\Big|_{y=y_0} =$$

$$= \frac{1}{x_0} e^{\sin\frac{y_0}{x_0}} \cdot \cos\frac{y_0}{x_0}$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\sqrt{xy_0 + \frac{x}{y_0}}\right)'\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{xy_0 + \frac{x}{y_0}}} \cdot \left(y_0 + \frac{1}{y_0}\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{y_0^2 + 1}{2y_0\sqrt{x_0 y_0 + \frac{x_0}{y_0}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\left(\sqrt{x_0y+\frac{x_0}{y}}\right)'\Big|_{y=y_0}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x_0y+\frac{x_0}{y}}}\cdot\left(x_0-\frac{x_0}{y^2}\right)\Big|_{y=y_0}=\frac{x_0y_0^2-x_0}{2y_0^2\sqrt{x_0y_0+\frac{x_0}{y_0}}}$$

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\left(e^{z_0x}\sqrt{x^2+y_0^2}\right)'\Big|_{x=x_0}=$$

$$=z_0e^{z_0x}\sqrt{x^2+y_0^2}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y_0^2}}\cdot e^{z_0x}\Big|_{x=x_0}=$$

$$=\frac{e^{z_0x_0}(z_0x_0^2+z_0y_0^2+x_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\left(e^{x_0z_0}\sqrt{x_0^2+y^2}\right)'\Big|_{y=y_0}=\frac{e^{x_0z_0}\cdot y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\left(e^{x_0z}\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)'\Big|_{z=z_0}=e^{x_0z_0}\cdot x_0\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

4. Să se cerceteze dacă funcția f(x, y) $=\sqrt{x^2+y^2}$ este diferențiabilă în origine.

Soluție

O condiție necesară pentru ca o funcție să fie diferențiabilă într-un punct o reprezintă existența derivatelor parțiale în acel punct.

Să vedem, de exemplu, dacă există $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{\sqrt{y^2-0}}{y}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{|y|}{y}=-1$$

$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{f(0,y)-f(0,0}{y-0}$

Cele două lim
derivabilă parțial în ra
este diferențiabilă în o

5. Fie f(x, y)= {

Să se arate că
parțiale în origine, îns

Soluție

Fie (x, y) ∈ IR²,

$0\le|f(x,y)|=$

$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=$

⇒ f este conti
2ab ≤ a² + b²).

Să cercetăm e

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,}{x-0}$

În mod analog,

există $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ și ia v

Să presupunem

Există atunci
valoarea 0 în punctul

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{\sqrt{y^2} - 0}{y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \frac{|y|}{y} = 1$$

Cele două limite nefiind egale, deducem că f nu este derivabilă parțial în raport cu variabila y în punctul (0, 0), deci f nu este diferențiabilă în origine.

5. Fie $f(x, y)= \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Să se arate că f este continuă în origine, admite derivate parțiale în origine, însă nu este diferențiabilă în origine.

Soluție

Fie $(x, y) \in IR^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f este continuă în punctul (0, 0) (am folosit inegalitatea $2ab \le a^2 + b^2$).

Să cercetăm existența derivatelor parțiale în origine:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \Rightarrow (\exists) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

În mod analog, $\lim_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$, de unde deducem că există $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ și ia valoarea 0.

Să presupunem că f ar fi diferențiabilă în origine.

Există atunci o funcție $\omega : IR^2 \to IR$, continuă și care ia valoarea 0 în punctul (0, 0) astfel încât:

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y + \omega(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2}, (\forall)(x,y) \neq (0,0) \qquad \frac{\frac{\alpha}{n^2}}{\frac{1+\alpha^2}{n^2}}$$

Dar funcția $\omega(x, y)$ nu are limită în origine (este suficient să considerăm şiruri de forma $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, deci f nu este diferențiabilă în origine.

O condiție suficientă ca f să fie diferențiabilă în punctul (0,0) este să existe derivatele parțiale ale lui f pe o vecinătate a punctului (0, 0) şi să fie continue în (0, 0). Întrucât f nu este diferențiabilă în origine şi deoarece există derivatele parțiale ale lui f pe tot $\mathbb{R}^2$, deducem că ori $\frac{\partial f}{\partial x}$, ori $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în (0, 0) (aceasta se poate observa printr-un calcul direct).

6. Fie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I. Este f diferențiabilă în origine ?

b) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul II în origine şi diferențiala de ordinul II a funcției f în origine.

Soluție

a) Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(xy_0 \cdot \frac{x^2 - y_0^2}{x^2 + y_0^2}\right)'\Big|_{x=x_0} =$

$$= y_0 \cdot \frac{(3x^2 - y_0^2)(x^2+y_0^2) - 2x^2(x^2 - y_0^2)}{(x^2+y_0^2)^2}\Big|_{x=x_0} =$$

$$= y_0 \cdot \frac{x_0^4 + 4x_0^2y_0^2 - y_0^4}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

În mod analog, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(x_0 \cdot y \cdot \dfrac{x_0^2 - y^2}{x_0^2 + y^2}\right)' \Big|_{y=y_0} =$

$$= x_0 \cdot \frac{x_0^4 - 4x_0^2 y_0^2 - y_0^4}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

Fie $(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{0 - y} = 0$$

Aşadar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \cdot \dfrac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Fie $(x, y) \neq (0, 0)$. Atunci

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = |y| \cdot \frac{|x^4 + 4x^2y^2 - y^4|}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \cdot \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq$$

$$\leq |y| \cdot \frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

În mod analog, rezultă: $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Deducem că funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în origine deci f este diferenţiabilă în origine.

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^4}{x^4} - 0}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\left(\frac{-y^4}{y^4}\right) - 0}{y} =$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\cdot dx\cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\cdot dy\cdot dx +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot dy^2 = 0\cdot dx^2 + 1\cdot dx\cdot dy - 1\cdot dy\cdot dx + 0\cdot dy^2 = 0$$

7. Fie φ:IR$\to$IR o funcție derivabilă. Să se arate că funcția Z:IR$^2\to$R, Z (x,y) = $\varphi(x^2 + y^2)$ verifică ecuația:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Soluție

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x\cdot\varphi'(x^2+y^2),$$
unde am notat prin $u(x,y) = x^2 + y^2$.

Analog $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \varphi'(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y\cdot\varphi'(x^2+y^2)$,

Atunci:

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = y\cdot 2x\cdot\varphi'(x^2+y^2) - x\cdot 2y\cdot\varphi'(x^2+y^2) = 0,$$

8. Fie φ: $IR^2 \to IR$ o funcție diferențiabilă pe IR^2. Să se arate că funcția Ψ: $IR^3 \to IR$, definită prin $\Psi(x, y) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2)$ satisface relația:

$$x\cdot z\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} + (x^2-y^2)\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0$$

Soluție

Să notăm $u(x, y, z) = xy$, $v(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) =$$
$$= y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + 2x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) =$$
$$= x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + 2y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) =$$
$$= -2z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

Obținem, în final:

$$x\cdot z\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\cdot z\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial y} + (x^2-y^2)\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial z} =$$
$$= x\cdot y\cdot z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + 2x^2z\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) - xyz\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) - 2y^2z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) +$$
$$+ (-y^2+x^2)(-2z)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = 0$$

9. Fie g: $IR^2 \to IR$ o funcție de clasă $\mathscr{C}^2$ (derivabilă de ordinul I și II și cu derivatele parțiale de ordinul II continue) ce satisface ecuația lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=0,\quad (\forall)\ (x,y)\in IR^2$$

Să se arate că funcția f: $IR^2 \setminus \{0, 0\} \to IR$, $f(x,y)=g\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ satisface, de asemenea, ecuația lui Laplace.

Soluție

Fie $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=$$

$$=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)(u,v)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)(u,v)\cdot\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+$$

$$+\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{-2x(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}+\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\cdot\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot$$

$$\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)^2+4x(x^2+y^2)\cdot 2xy}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot \frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \cdot \left(- \frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} \right) - \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 2x \frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3} +$$

$$+ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \left(- \frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 2y \frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Se calculează în mod analog $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ şi se va obţine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

(folosind faptul că $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = 0$)

10. Să se elimine, prin derivări succesive, funcţiile arbitrare φ şi Ψ de clasă $\mathscr{C}^2$ pe IR:

a) $Z(x,y)= \varphi(x)+ \Psi(y)$

b) $Z(x,y)= \varphi(x) \cdot \Psi(y)$

c) $Z(x,y)= \varphi(x+y)+ \Psi(x-y)$

Soluţie

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x) \cdot \Psi(y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x) \cdot \Psi'(y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi'(x) \cdot \Psi'(y)$

Rezultă că $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(x)\cdot\Psi(y)\cdot\varphi(x)\cdot\Psi'(y)=$

$$=\varphi(x)\cdot\psi(y)\cdot\varphi'(x)\cdot\Psi'(y)=z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

Aşadar, $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\Psi'(x-y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\Psi''(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\Psi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)-(-\Psi''(x-y))=\varphi''(x+y)+\Psi''(x-y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

11. Să se calculeze diferenţialele de ordinul I şi II pentru funcţia F: $IR^2\to IR$, $F(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$ unde f: $IR^3\to IR$, este o funcţie diferenţiabilă de două ori

Soluţie

Fie $u(x, y)=x^2 + y^2$, $v(x, y) = x^2-y^2$, $\omega(x, y) = 2xy$. Atunci:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}+2y\frac{\partial f}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}=2y\frac{\partial f}{\partial u}-2y\frac{\partial f}{\partial v}+2x\frac{\partial f}{\partial \omega}$$

Diferențiala de ordinul I a funcției F se poate scrie:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy=\left(2x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+2y\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\cdot dx+$$

$$+\left(2y\frac{\partial f}{\partial u}-2y\frac{\partial f}{\partial v}+2x\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\cdot dy$$

Derivatele parțiale de ordinul II ale funcției F sunt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \omega}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial u}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\cdot$$

$$\cdot 2x+2\frac{\partial f}{\partial u}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial v}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)2x+2\frac{\partial f}{\partial v}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \omega}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\cdot 2y+0\cdot\frac{\partial f}{\partial \omega}=$$

$$=4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+$$

$$+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial v}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \omega}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}+2\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{\partial f}{\partial v}=$$

$$=4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}+8x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+$$

$$+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}+2\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial u}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)+$$

$$+2\frac{\partial f}{\partial u}-2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial v}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)-2\frac{\partial f}{\partial v}+$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \omega}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)+0\cdot\frac{\partial f}{\partial \omega}=$$

$$=4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}-8y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+8xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \omega}-$$

$$-8xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}+2\frac{\partial f}{\partial u}-2\frac{\partial f}{\partial v}\quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial u}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\cdot$$

$$\cdot 2y+0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega\partial v}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\cdot(-2y)+0+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \omega}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\cdot 2x+2\frac{\partial f}{\partial \omega}=4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-$$

$$-4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}+4(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \omega}+4(x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial \omega}+\frac{2\partial f}{\partial \omega}$$

Pentru a afla acum diferenţiala de ordinul II utilizăm formula: $d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$ şi înlocuim derivatele parţiale cu rezultatele găsite.

12. Să se calculeze derivatele parţiale de orice ordin, precum şi diferenţialele de orice ordin pentru funcţia

$f: IR^2 \to IR$, $f(x, y) = e^{ax+by}$; $a, b \in IR$

Soluție

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ae^{ax+by}; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = be^{ax+by}$$

$$df = ae^{ax+by}.\ dx + be^{ax+by}dy = e^{ax+by}(adx + bdy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = a^2e^{ax+by}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = abe^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = b^2e^{ax+by}$$

Prin inducție, se arată imediat că:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x,y) = a^k \cdot b^{n-k}e^{ax+by}$$

Rezultă că:

$$d^nF = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k \cdot dy^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} e^{ax+by} \cdot dx^k \cdot dy^{n-k} =$$

$$= e^{ax+by} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (adx)^k \cdot (bdy)^{n-k} =$$

$$= e^{ax+by} \cdot (adx + bdy)^n$$

Diferențiala de ordin n în punctul (x_0, y_0), calculată în (x, y) este: $d^nF((x,y);(x_0,y_0)) = e^{ax_0+by_0+cz_0} \cdot [a(x-x_0)+b(y-y_0)]^n$

13. Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea în punctul (1, 1) pentru funcția $f:(0,\infty) \times (0,\infty) \to IR$, $f(x, y) = x^y$

Soluție

Avem, succesiv:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=y(y-1)x^{y-2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=x^{y-1}(y\ln x+1)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^y(\ln x)^2$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(y\cdot\ln x\cdot x^{y-1}+x^{y-1})=y\cdot x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x+$$
$$+(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[x^y\cdot(\ln x)^2]=y\cdot x^{y-1}\cdot(\ln x)^2+x^y\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=x^{y-1}\cdot\ln x[y\cdot\ln x+2]$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)=y\cdot(y-1)\cdot(y-2)\cdot x^{y-3}$$

Înlocuind (x, y) prin (1, 1), obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1;\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1)=0;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,1)=1;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,1)=0;\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1)=0;$$

Polinomul Taylor de gradul III ataşat funcţiei f, în punctul (1,1) are forma:

$$T_3(x,y)=\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\right.$$
$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,1)\cdot(x$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\cdot(x-\right.$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1)+$$
$$+\frac{2}{2!}(x-1)(y-1)+$$

B. Probleme p

1. Pornind de la d

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(4,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(4,$

R. $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)$, pe

R. $\frac{1}{9}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ şi

$=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y}$

R. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$

$$T_3(x,y) = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1)\cdot(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,1)\cdot(x-1)^2(y-1) + \right.$$

$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,1)\cdot(x-1)(y-1)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1)\cdot(y-1)^3\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\cdot(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\cdot(y-1)^2\right] +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot(y-1) + f(1,1) = \frac{3}{3!}(x-1)^2(y-1) +$$

$$+ \frac{2}{2!}(x-1)(y-1) + (x-1) + 1 = \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + (x-1)(y-1) + x$$

B. Probleme propuse

1. Pornind de la definiție, să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(4,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(4,1)$ pentru f:D→IR, f(x, y) = ln(x-y²);

$$D = \{(x, y) \in IR^2 / x > y^2\}$$

R. $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)$, pentru f: $IR^2 \to IR$, f(x, y) = $\sqrt[3]{x^2 y}$

R. $\frac{1}{9}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, pentru f: $IR^2 \to IR$, f(x, y) = $=\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$

R. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$

2. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$

b) $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $x>0$, $y \neq 0$

c) $f(x, y) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$; $x \neq 0$, $x + \dfrac{y}{2x} \neq 0$

d) $f(x, y) = \arcsin\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $x^2 + y^2 \leq 1$

e) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$

f) $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

g) $f(x, y, z) = e^{xz}\sqrt{x^2 + y^2}$

h) $f(x, y, z) = \mathrm{arctg}\ \dfrac{y}{xz}$

i) $f(x, y, z) = x^y + y^z - 2z^x$; $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

3. Să se arate că funcția $f(x, y) = \mathrm{arctg}\ \dfrac{y}{x}$ satisface ecuația lui Laplace, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

4. Să se calculeze $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ și $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ pentru funcția $f(x, y) = \cos(ax + e^y)$

5. Să se calculeze $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ pentru $f(x, y) = \dfrac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$

6. Să se calculeze $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ pentru $f(x, y) = \mathrm{arctg}\ xy$

7. Fie f(x, y) =

relația: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \ldots$

8. Să se arate

f derivabilă verif

9. Să se arate

f, g derivabile

$x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + xy \ldots$

10. Să se

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, atunc

$x^2 + y^2 \neq 0$ sat

11. Să se ara

satisface relația: x

este o funcție deriva

12. Dacă F (x

f diferențiabilă

7. Fie f(x, y) = $\dfrac{xy}{x-y}$; $x \neq y$. Să se arate că este adevărată relaţia: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x-y}$

8. Să se arate că F(x, y) = $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)\cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, cu $x \neq 0$ şi f derivabilă verifică ecuaţia: $x\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-a}F(x,y)$

9. Să se arate că F(x, y) = $\dfrac{x}{y}f(y)+\dfrac{x}{y}g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, cu $x \neq 0$, $y \neq 0$, f, g derivabile de două ori verifică ecuaţia:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}-y\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

10. Să se arate că dacă u(x, y) satisface ecuaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, atunci şi funcţia v(x, y) = $u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, cu $x^2 + y^2 \neq 0$ satisface aceeaşi ecuaţie.

11. Să se arate că funcţia v (x, y) = $yu\left(y\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right)$, $x \neq 0$ satisface relaţia: $x(x^2+y^2)\dfrac{\partial v}{\partial x}+2y^2\left(x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}-v\right)=0$ unde u este o funcţie derivabilă

12. Dacă F (x, y, z) = $x^k\cdot f\left(\dfrac{z}{x}, \dfrac{y}{x}\right)$ cu $x \neq 0$, $k \in IR$ şi f diferenţiabilă, atunci $x\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}+z\dfrac{\partial F}{\partial z}=kF(x,y,z)$

13. Fie Ψ: $IR^2 \to IR$, $f(x, y) = x \cdot \varphi(x + y) + y \cdot \Psi(x+y)$, unde φ, Ψ sunt derivabile de două ori. Să se arate că are loc relația:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

14. Arătați că funcția

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = y = 0 \end{cases}$$

admite derivate parțiale în punctul (0, 0), $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, deși funcția este discontinuă în acest punct.

15. Să se arate că, deși funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{pentru } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = y = 0 \end{cases}$$

are în vecinătatea punctului (0, 0) derivate parțiale discontinue în punctul (0, 0) și nemărginite în orice vecinătate a acestui punct, totuși ea este diferențiabilă în punctul (0, 0).

16. Fie f: $IR^2 \to IR$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$

Să se arate că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, deși nu sunt satisfăcute criteriile lui Schwarz și Young

17. Să se arat

admite derivate par

acest punct.

18. Să se calc

$x^2 + y^2 + z^2$), unde f a

19. Să se calc

a) d^3f, dacă f

b) d^2f, dacă f

c) d^2f, dacă f

d) d^nf, dacă f

e) d^nf, dacă f

f) d^nf, dacă f(

20. Să se de

formulei lui Taylor, în

să se găsească rest

21. Să se de

punctului (0, 0), până

22. Să se dez

jurul punctului (1, 1,

17. Să se arate funcția $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0 \\ 1, & \text{dacă } x \neq 0,\ y \neq 0 \end{cases}$

admite derivate parțiale în origine, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

18. Să se calculeze dF și d^2F pentru $F(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, unde f admite derivate parțiale de ordinul II continue

19. Să se calculeze diferențialele de ordinul indicat:

a) d^3f, dacă $f(x, y) = x^2z^2$

b) d^2f, dacă $f(x, y) = \ln(x - y)$; $x > y$

c) d^2f, dacă $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$

d) d^nf, dacă $f(x, y, z) = e^{ax + by + cz}$

e) d^nf, dacă $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$

f) d^nf, dacă $f(x, y, z) = \ln(ax + by + cz)$, $ax + by + cz > 0$

20. Să se dezvolte funcția $f(x, y) = \ln(x - y)$ cu ajutorul formulei lui Taylor, în punctul (0, -1), până la termenii de ordin II și să se găsească restul corespunzător.

21. Să se dezvolte funcția $f(x, y) = e^{2x} \ln(1 + y)$ în jurul punctului (0, 0), până la termenii de ordin III.

22. Să se dezvolte funcția $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 - 3xyz$ în jurul punctului (1, 1, 1), până la termenii de ordin II.

4.3. Extremele funcţiilor de mai multe variabile. Extreme cu legături.

A.1. Probleme rezolvate

1. Să se determine extremele funcţiei $f: IR^2 \to IR$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$.

Soluţie.

f admite derivate parţiale de ordinul II continue pe IR^2. Să determinăm punctele staţionare ale funcţiei. Acestea se găsesc rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2 - 1) = 0 \\ y(2y^2 - 1) = 0 \end{cases}.$$

Rezultă următoarele puncte din plan: $(0,0)$, $(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$,

$(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Fie

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12a^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12b^2 - 2 \end{vmatrix} = 4(6a^2 - 1)(6b^2 - 1).$$

1) $(a,b) = (0,0) \Rightarrow \Delta = 4 > 0 \Rightarrow (0,0)$ este punct de extrem;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0 \Rightarrow (0,0)$ este punct de maxim.

2) $(a,b)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \Delta=4\cdot(-1)\cdot 2<0\Rightarrow\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nu este punct de extrem (este punct şa).

3) $(a,b)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \Delta=4\cdot(-1)\cdot 2<0$, deci nici punctul $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nu este punct de extrem (este punct şa).

4) $(a,b)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ nu este punct de extrem.

5) $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ nu este punct de extrem.

6) $(a,b)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \Delta=8>0\Rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de extrem; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4>0\Rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ punct de minim.

7) $(a,b)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \Delta=8>0$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\Rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ punct de minim.

În mod analog deducem că şi punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sunt puncte de minim.

2. Să se determine extremele funcţiei $f:\mathrm{IR}^2\to\mathrm{IR}$, $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$.

Soluţie.

f admite derivate parţiale de ordinul II continue pe IR^2. Aflăm punctele staţionare rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{-(x^2+y^2)}-2x(x+y)e^{-(x^2+y^2)}=0\\ e^{-(x^2+y^2)}-2y(x+y)e^{-(x^2+y^2)}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x^2-2xy=0\\ 1-2xy-2y^2=0\end{cases}.$$

Scăzând cele două ecuații obținem $x^2=y^2\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=0$.

a) $x-y=0\Rightarrow x=y\Rightarrow 1-2x^2-2x^2=0\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$, de unde rezultă $x=y=\frac{1}{2}$ sau $x=y=-\frac{1}{2}$.

b) $x+y=0\Rightarrow y=-x\Rightarrow 1-2x^2+2x^2=0$ - contradicție. Deci punctele staționare sunt punctele $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ și $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Să calculăm derivatele parțiale de ordinul II.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xe^{-(x^2+y^2)}-(4x+2y)e^{-(x^2+y^2)}+4x^2(x+y)e^{-(x^2+y^2)}=$$

$$=2(2x^3+2x^2y-3x-y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2ye^{-(x^2+y^2)}-2xe^{-(x^2+y^2)}+4xy(x+y)e^{-(x^2+y^2)}=$$

$$=2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2y+2y^2x-2x-2y)$$

și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2ye^{-(x^2+y^2)}-(4y+2x)e^{-(x^2+y^2)}+4y^2(x+y)e^{-(x^2+y^2)}=$$

$$=2(2xy^2+2y^3-3y-x)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\text{Fie }\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}$$

i) $(a,b)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2 & -\frac{1}{2}+2\\ -\frac{1}{2}+2 & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2\end{vmatrix}\cdot 4\sqrt{e}=$

$$=4\sqrt{e}\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=8\sqrt{e}>0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}>0\Rightarrow\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ punct de minim.

ii) $(a,b)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \Delta=8\sqrt{e}>0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ punct de maxim.

3. Să se găsească extremele funcției f,
$f:(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)\to IR$,
$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

Soluție.

f admite derivate parțiale de ordinul II continue pe domeniul de definiție.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\frac{y^2}{4x^2}=0\\ \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0\\ \frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-y)(2x+y)=0\\ y^3=2xz^2\\ z^3=y\end{cases}.$$

Din prima ecuație rezultă $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

$$y^3 = yz^2 \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow z = y\ (y>0, z>0)$$
$$z^3 = y \Rightarrow y^3 = y \Rightarrow y(y-1)(y+1) = 0 \Rightarrow y = 1$$
Atunci z=1 şi $x = \frac{1}{2}$.

Singurul punct staţionar este $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$. Să calculăm derivatele parţiale de ordinul II.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$$

Atunci diferenţiala de ordinul II calculată în punctul $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ este următoarea funcţională pătratică:

$$d^2 f\left(\frac{1}{2},1,1\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},1,1\right)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},1,1\right)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{1}{2},1,1\right)dz^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2},1,1\right)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{2},1,1\right)dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\left(\frac{1}{2},1,1\right)dydz =$$
$$= 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 2dydz.$$

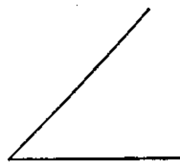
Matricea ataşată funcţionalei pătratice este: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$

este punct de minim pe

4. Într-un plan s
triunghi drept bază se
aceeaşi înălţime h. Să
mică arie laterală S.

Soluţie.



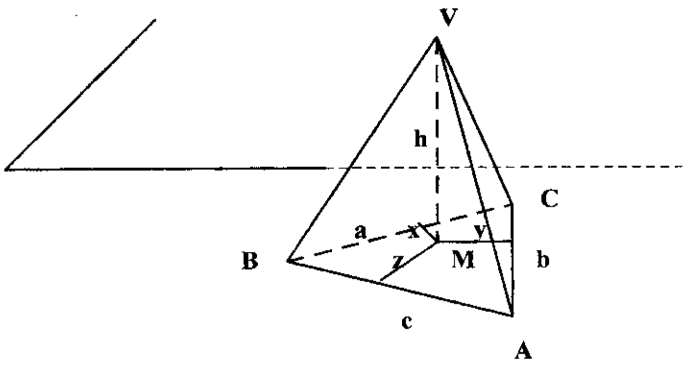
Vârful piramidei se afl
triunghiul, la distanţa h
proiecţiei M a vârfului p
Poziţia lui este perf
perpendicularelor duse
din aceste mărimi este
se află de aceeaşi par
vom pune semnul min
triunghiului, este înde
$z = \frac{2S_4 - ax - by}{c}$. Aria

$$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 52 \Rightarrow \text{ punctul } \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

este punct de minim pentru f.

4. Într-un plan se dă un triunghi cu laturile a, b, c. Pe acest triunghi drept bază se pot construi o infinitate de piramide cu aceeaşi înălţime h. Să se determine piramida care are cea mai mică arie laterală S.

Soluţie.



Vârful piramidei se află în planul paralel cu planul în care se află triunghiul, la distanţa h de acesta. Problema se reduce la aflarea proiecţiei M a vârfului piramidei pe planul în care se află triunghiul. Poziţia lui este perfect determinată prin mărimile x, y, z a perpendicularelor duse din punctul M pe laturile a, b, c. Fiecare din aceste mărimi este "pozitivă" (are semnul plus) dacă punctul se află de aceeaşi parte a laturii ca al treilea vârf al triunghiului şi vom pune semnul minus în caz contrar. Dacă notăm prin S_4 aria triunghiului, este îndeplinită relaţia: $ax + by + cz = 2S_4$, de unde $z = \frac{2S_4 - ax - by}{c}$. Aria laterală se exprimă prin:

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+\frac{c}{2}\sqrt{z^2+h^2}=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+$$

$$+\frac{c}{2}\frac{\sqrt{(2S_4-ax-by)^2+c^2h^2}}{c}=S(x,y)$$

Numărul variabilelor s-a redus la două: x şi y. Avem:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{ax}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{1}{2}\frac{cz}{z^2+h^2}\frac{a}{c} \text{ şi } \frac{\partial S}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{by}{\sqrt{y^2+h^2}}-\frac{1}{2}\frac{cz}{z^2+h^2}\frac{b}{c}.$$

Din sistemul: $\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial y}=0\end{cases}$ obţinem: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}$,

de unde x = y = z. Punctul corespunzător este centrul cercului înscris în triunghiul dat.

5. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y)=x^2+y^2-y-x$, condiţionată de ecuaţia $x+y=1$.

Soluţie.

Avem de rezolvat o problemă de extrem cu o singură legătură: $x+y-1=0$. Formăm funcţia ajutătoare:

$\Phi(x,y;\lambda)=x^2+y^2-y-x+\lambda(x+y-1)$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1+\lambda=0\\ 2y-1+\lambda=0,\\ x+y-1=0\end{cases}$$ sistem ce admite soluţia unică:

$x = y = \dfrac{1}{2}$, $\lambda = 0$. Diferențiala de ordinul II a funcției Φ în punctul $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ pentru $\lambda = 0$ este:

$$d^2\Phi(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0\right)dx^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0\right)dxdy + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0\right)dy^2 =$$

$$= 2dx^2 + 2dy^2$$

Diferențiind legătura $x + y - 1 = 0$ obținem $dx + dy = 0$, sau $dx = -dy$. Așadar, $d^2\Phi(x,y) = 4dx^2 > 0$, de unde rezultă că punctul $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ este punct de minim.

Observație.

Faptul că $\lambda = 0$ exprimă faptul că legătura nu intervine în găsirea punctului de extrem și, deci, în acest caz problema este de fapt o problemă clasică de aflare a extremelor.

6. Să se găsească extremele funcției $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$, știind că $x + y + z = 5$ și $xy + yz + zx = 8$.

Soluție.

Este o problemă de extrem cu două legături:

$$\begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ xy + yz + zx - 8 = 0 \end{cases}.$$

Introducem funcția ajutătoare:

$$\Phi(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8).$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0 \\ xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0 \\ xy + \lambda_1 + \lambda_2(y+x) = 0 \\ x + y + z = 5 \\ xy + zx + yz = 8 \end{cases}$$

Scăzând primele trei ecuații, două câte două, obținem:

$$\begin{cases} (y-x)(\lambda_2 + z) = 0 \\ (z-y)(\lambda_2 + x) = 0 \\ (z-x)(\lambda_2 + y) = 0 \\ x + y + z = 5 \\ xy + zx + yz = 8 \end{cases}$$

În cazul primei ecuații putem avea două situații:

a) $y - x = 0$

b) $y - x \neq 0$

a) $y - x = 0 \Rightarrow x = y$. Corelând cu $z - y = 0$, din a doua ecuație, precum și cu a patra ecuație, rezultă: $z = y = x = \frac{5}{3}$, care nu satisface a cincea ecuație. Deci $z - y \neq 0$ și rezultă: $x = -\lambda_2$, $y = -\lambda_2$. Înlocuind în ultimele două ecuații, rezultă:

$$\begin{cases} z - 2\lambda_2 = 5 \\ \lambda_2^{\,2} - 2z\lambda_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow z = 2\lambda_2 + 5$$

$$\lambda_2^{\,2} - 2\lambda_2(2\lambda_2 + 5) = 8 \Leftrightarrow 3\lambda_2^{\,2} + 10\lambda_2 + 8 = 0$$

$\Delta = 100 - 96 = 4,\ \lambda_2 = \dfrac{-10 \pm 2}{6} = \left\langle \begin{matrix} -\dfrac{4}{3} \\ -2 \end{matrix} \right.$

i) $\lambda_2 = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow x = y = \dfrac{4}{3},\ z = -\dfrac{8}{3} + 5 = \dfrac{7}{3}$

$\lambda_1 = -yz - \lambda_2(y + z) = \dfrac{16}{9}$

Să calculăm diferențiala de ordinul II în punctul $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = z + \lambda_2; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = x + \lambda_2; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = y + \lambda_2.$$

Atunci $d^2\Phi\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}; \dfrac{16}{9}, \dfrac{7}{3}\right) = 2dxdy$.

Diferențiind legăturile, obținem:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ \dfrac{4}{3}dy + \dfrac{4}{3}dx + \dfrac{7}{3}dy + \dfrac{4}{3}dz + \dfrac{7}{3}dx + \dfrac{4}{3}dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ \dfrac{11}{3}dx + \dfrac{11}{3}dy + \dfrac{8}{3}dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow dz = 0,\ dy = -dx.$$

Rezultă $2dxdy = -2dx^2 < 0 \Rightarrow$ punctul $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$ este punct de maxim (local).

ii) $\lambda_2 = -2 \Rightarrow x = y = 2,\ z = 1$ și $\lambda_1 = 4$. Atunci $d^2\Phi(2,2,1;4,-2) = -dxdy = dx^2$ (diferențiind legăturile se obține tot dz=0, dy=-dx). Rezultă că punctul (2,2,1) este punct de minim (local).

b) $y - x \neq 0,\ y \neq x$ și $z = -\lambda_2$.

Rezolvând, se obțin permutările soluțiilor găsite în cazul precedent, și anume:

punctele $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ şi $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ - puncte de maxim;

punctele $(2,1,2)$ şi $(1,2,2)$ - puncte de minim.

7. Să se determine extremele funcţiei $f:(0,\infty)^4 \to \mathrm{IR}$, $f(x,y,z,t) = x+y+z+t$, cu condiţia $xyzt - c^4 = 0$, $c > 0$.

Soluţie.

Metoda I (schiţare)

Vom reduce problema la o problemă de extrem clasic, reducând numărul variabilelor.

$$xyzt = c^4 \Rightarrow t = \frac{c^4}{xyz}.$$

Trebuie să găsim acum extremele funcţiei de trei variabile, x, y, z, definite în primul octant al spaţiului, $g(x,y,z) = x+y+z+\frac{c^4}{xyz}$.

Punctele staţionare le găsim rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{c^4}{x^2yz} = 0 \\ 1 - \dfrac{c^4}{xy^2z} = 0 \\ 1 - \dfrac{c^4}{xyz^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2yz = xy^2z = xyz^2 = c^4 \Rightarrow x = y = z = c,$$

ceea ce implică $t = \frac{c^4}{c^3} = c$.

Se poate arăta uşor că punctul (c,c,c,c) este punct de minim (local), iar valoarea minimă a funcţiei f este 4c. Se poate arăta chiar că acest punct este punct de minim absolut (folosind inegalitatea mediilor, $x+y+z+t \geq 4\sqrt[4]{xyzt}$).

Metoda II

O rezolvăm ca o problemă de extrem cu legături.
Să introducem funcția ajutătoare

$F(x,y,z,t) = x+y+z+t+\lambda(xyzt-c^4)$. Punând condițiile $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, $\frac{\partial F}{\partial t}=0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$, se obține sistemul:

$$\begin{cases} 1+\lambda yzt = 0 \\ 1+\lambda xzt = 0 \\ 1+\lambda xyt = 0 \\ 1+\lambda xyz = 0 \\ xyzt = c^4 \end{cases}$$

Înmulțind primele patru ecuații cu variabila care lipsește, rezultă $x=y=z=t=-\lambda xyzt$. Deducem $x = y = z = t = c$ și $\lambda = -\frac{1}{c^3}$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$ și $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \lambda zt$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} = \lambda yt$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t} = \lambda yz$;

$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} = \lambda xt$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t} = \lambda xz$; $\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial t} = \lambda xy$.

Atunci, diferențiala de ordinul II a funcției F în punctul (c,c,c,c), calculată pentru $\lambda = -\frac{1}{c^3}$ va fi:

$$d^2F(c,c,c,c) = -\frac{2}{c}(dxdy + dxdz + dxdt + dydz + dydt + dzdt).$$

Diferențiind legătura $xyzt = c^4$, obținem:

$c^3(dx+dy+dz+dt) = 0 \Leftrightarrow dx+dy+dz+dt = 0$. Înlocuindu-l pe $dt = -(dx+dy+dz)$ în relația de mai sus, se obține:

$$d^2F(c,c,c,c)=\frac{1}{c}\left[-2dxdy-2dxdz-2dydz+2(dx+dy+dz)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{c}\left(2dx^2+2dy^2+2dz^2+2dxdy+2dxdz+2dydz\right)=$$

$$=\frac{1}{c}\left[(dx+dy)^2+(dx+dz)^2+(dy+dz)^2\right]>0\Rightarrow$$ punctul (c,c,c,c) este punct de minim (local), chiar absolut, conform celor constatate la metoda I.

8. Elipsoidul cu trei axe: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$ intersectează planul $lx+my+nz=0$, care trece prin centrul său (originea sistemului de axe). Să se determine semiaxa elipsei obținută ca secțiune, i.e. să se găsească valorile extreme ale funcției $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ dacă variabilele verifică ecuațiile de mai sus.

Soluție.

Metoda micșorării numărului de variabile pentru a reduce problema la o problemă de extrem clasic duce la calcule complicate; vom aplica metoda lui Lagrange. Fie

$$F(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+\lambda_2(lx+my+nz).$$

Impunem condițiile: $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=0$

$$\begin{cases} 2x\left(\dfrac{\lambda_1}{a^2}+1\right)+\lambda_2 l=0 \\ 2y\left(\dfrac{\lambda_1}{b^2}+1\right)+\lambda_2 m=0 \\ 2z\left(\dfrac{\lambda_1}{c^2}+1\right)+\lambda_2 n=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ lx+my+nz=0 \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație cu x, a doua ecuație cu y și a treia ecuație cu z, obținem: $\lambda_1=-\left(x^2+y^2+z^2\right)=-f(x,y,z)$. Se mai poate scrie:

$$x=-\frac{\lambda_2}{2}\frac{la^2}{a^2-f};\ y=-\frac{\lambda_2}{2}\frac{mb^2}{b^2-f};\ z=-\frac{\lambda_2}{2}\frac{nc^2}{c^2-f}.$$

De aici se obține ușor λ_2 și apoi x,y,z. Adunând egalitățile de mai sus înmulțite respectiv prin l, m, n se obține ecuația:

$\dfrac{l^2a^2}{a^2-f}+\dfrac{m^2b^2}{b^2-f}+\dfrac{n^2c^2}{c^2-f}=0$, de unde se determină cele două valori extreme ale funcției f (se ajunge la o ecuație de gradul II în f).

9. Să se găsească extremele funcției $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$ $=\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}$, știind că $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{a_k}=1$, unde $a_k>0$, $\forall k=\overline{1,n}$.

Soluție.

Fie $F(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}+\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{a_k}-1\right)$. Egalând cu 0 derivatele parțiale ale funcției F obținem:

$\dfrac{\partial F}{\partial x_k}=2x_k+\dfrac{\lambda}{a_k}=0,\ k=\overline{1,n};\ \sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{a_k}=1$. Rezultă: $x_k=-\dfrac{\lambda}{2a_k}$,

$\forall k = \overline{1,n}$.

Înlocuind în ultima ecuație, deducem: $\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{2}} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{2}}$.

Rezultă, aşadar: $x_l = \frac{1}{a_l \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^{2}}$, $l = \overline{1,n}$. Să notăm cu $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^{2}$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^{2}} = 2$; $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \ (\forall)\ k \neq l.$

Diferențiala de ordinul II în punctul considerat este:

$d^2F = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^{2}} = 4n > 0 \Rightarrow$ punctul de coordonate $\left(\frac{1}{a_1 A}, \dots, \frac{1}{a_n A}\right)$ este punct de minim (local). Cu ajutorul inegalității Cauchy-Buniakovski - Schwartz se arată imediat că punctul este de minim global. Valoarea minimă a funcției este $m = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A^2 \cdot a_k^{2}} =$

$= \frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{2}}.$

A.2. Aplicații în economie

1. Producția săptămânală de brânză a unui producător rural este dată prin $Q = 30L^{0,25} \cdot K^{0,75}$, unde Q reprezintă cantitatea de brânză exprimată în pounds, L reprezintă orele de muncă necesare iar K reprezintă capitalul investit exprimat în sute de dolari. Dacă fabrica şi-a propus să producă 300 pounds pe săptămână, găsiți valorile lui K şi L ce minimizează costul săptămânal, în condițiile în care fiecare oră de muncă este plătită cu 10 \$/h.

Soluție.

Costul total exprimat în dolari este: C(K,L)=10L+100K. (K este exprimat în sute de dolari). Legătura este: Q=300 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30\cdot L^{\frac{1}{4}}\cdot K^{\frac{3}{4}}=300 \Leftrightarrow L^{\frac{1}{4}}\cdot K^{\frac{3}{4}}=10 \Leftrightarrow LK^3=10^4$.

Formăm funcția ajutătoare F, dată prin:

$F(K,L;\Lambda)=10L+100K+\Lambda\left(LK^3-10^4\right)$.

Egalăm derivatele parțiale ale acestei funcții cu 0.

Obținem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial K}=100+3\Lambda LK^2=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial L}=10+\Lambda K^3=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}=LK^3-10^4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Lambda LK^2=-\dfrac{100}{3}\\ \Lambda K^3=-10\\ LK^3=10^4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{L}{K}=\dfrac{10}{3}\\ LK^3=10^4\\ \Lambda K^3=-10\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}L=\dfrac{10K}{3}\\ K^4=3\cdot 10^3\\ \Lambda=-\dfrac{10}{K^3}\end{cases}$$

Din a doua ecuație obținem $K=3^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{3}{4}} \Rightarrow L=\dfrac{10^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}$.

Costul minim este atunci $C=100\cdot 3^{-\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{3}{4}}+100\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{4}{3}}\cong 9870\$$.

2. Producătorii şamponului Chevelure îşi produc şi vând produsele în patru centre: A (Atlanta), B (Boston), C (Chicago), D (Dallas). Pentru următorul an ei îşi planifică să cheltuiască pe publicitate suma de $507\cdot 10^3\$$. Datele culese indică următoarea

legătură între vânzări şi sumele folosite pe reclame, în fiecare din cele patru centre:

$q_A = 500 \cdot X_A^{\frac{1}{2}}$,

$q_B = 600 \cdot X_B^{\frac{1}{2}}$,

$q_C = 800 \cdot X_C^{\frac{1}{2}}$,

$q_D = 720 \cdot X_D^{\frac{1}{2}}$,

unde q reprezintă numărul de vânzări, iar X suma cheltuielilor pe publicitate. Folosind preţurile de vânzare, costurile variabile (pe unitatea de produs) şi costurile anuale fixe date în tabelul următor, găsiţi valorile X_A, X_B, X_C şi X_D ce maximizează profitul.

Piaţa	Preţul de vânzare	Costul variabil	Costul fix
A	**1,60$**	**0,80$**	**40000$**
B	**2,00$**	**1,00$**	**60000$**
C	**1,70$**	**1,00$**	**80000$**
D	**1,50$**	**0,50$**	**30000$**

Soluţie.

Suma obţinută din vânzări este:

$R = 1{,}6q_A + 2q_B + 1{,}7q_C + 1{,}5q_D$, în timp ce costul total se obţine adunând costul fix cu costul variabil şi cheltuielile publicitare, fiind dat de:

$C = 0{,}8q_A + q_B + q_C + 0.5q_D + X_A + X_B + X_C + X_D + 210000.$

Beneficiul rezultat are forma:

$B = R - C = 0{,}8q_A + q_B + 0{,}7q_C + q_D - X_A - X_B - X_C - X_D - 210000 =$

$= 400X_A^{\frac{1}{2}} + 600X_B^{\frac{1}{2}} + 560X_C^{\frac{1}{2}} + 720X_D^{\frac{1}{2}} - X_A - X_B - X_C - X_D -$

$- 210000.$

Trebuie să ţinem cont de restricţia:

$X_A + X_B + X_C + X_D = 507000.$

Formăm funcția ajutătoare:

$$F(X_A, X_B, X_C, X_D; \Lambda) = 400X_A^{\frac{1}{2}} + 600X_B^{\frac{1}{2}} + 560X_C^{\frac{1}{2}} + 720X_D^{\frac{1}{2}} - X_A -$$

$$- X_B - X_C - X_D - 210000 + \Lambda(X_A + X_B + X_C + X_D - 507000)$$

Egalând cu 0 derivatele parțiale de ordinul I se obține sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X_A} = 200 \cdot X_A^{-\frac{1}{2}} - 1 + \Lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_B} = 300 \cdot X_B^{-\frac{1}{2}} - 1 + \Lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_C} = 280 \cdot X_C^{-\frac{1}{2}} - 1 + \Lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_D} = 360 \cdot X_D^{-\frac{1}{2}} - 1 + \Lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Lambda} = X_A + X_B + X_C + X_D - 507000 = 0 \end{cases}$$

Rezultă $1 - \Lambda = 200X_A^{-\frac{1}{2}} = 300X_B^{-\frac{1}{2}} = 280X_C^{-\frac{1}{2}} = 360X_D^{-\frac{1}{2}}$ și, exprimând în funcție de X_A:

$X_B = 2{,}25X_A$

$X_C = 1{,}96X_A$

$X_D = 3{,}24X_A$

Înlocuind în ultima ecuație a sistemului, se obține:

X_A=60000, de unde X_B=135000\$, X_C=117600\$, și X_D=194400\$.

3. *Optimul producătorului: maximizarea producției la un cost dat*

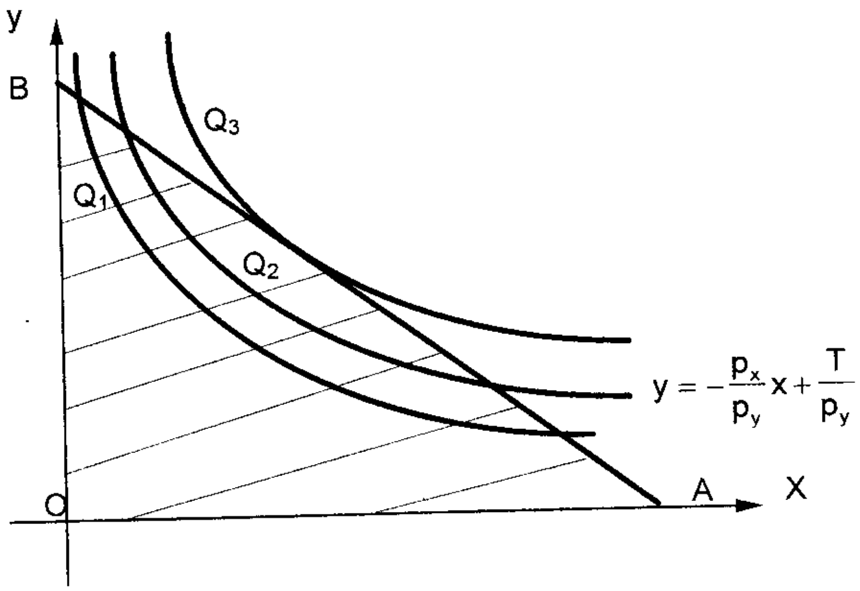
Considerăm un producător ce are la dispoziție doi factori de producție, x și y, pentru a produce anumite bunuri. Problema este de a determina volumul maxim al producției în situația în care agentul economic dispune de o cantitate totală fixă a resurselor, notată cu T și cunoaște prețurile p_x și p_y ale factorilor de producție, exprimate toate în franci francezi. Dacă notăm cu x, y cantitățile utilizate din cei doi factori și cu Q(x,y) volumul producției rezultate

din această alocare, atunci se cere maximul funcției de producție $Q(x,y)$, ținând cont de restricția $T=x\,p_x+y\,p_y$.

Soluție.

Metoda I.

Curba $x\,p_x+y\,p_y=T$ este, în planul xOy, o dreaptă. Dar $x \geq 0$, $y \geq 0$, deci în plan ne va interesa doar un segment al acestei drepte.



Opțiunea producătorului este undeva în triunghiul OAB, el nefiind obligat să cheltuiască tot bugetul. Combinațiile de factori de producție ce realizează acelaşi volum al producției se numesc curbe de izoprodus sau izocuante. Pe desen sunt figurate trei

asemenea izocuante, corespunzătoare nivelelor de producţie Q_1, Q_2, Q_3.

Se observă că maximul este atins pentru izocuanta care este tangentă la dreapta bugetului. Aceasta este o soluţie euristică, intuitivă.

Metoda II.

$T=x\,p_x+y\,p_y \Rightarrow y=\dfrac{T}{p_y}-x\dfrac{p_x}{p_y}=f(x)$ (o funcţie f depinzând de x). Trebuie să determinăm extremele funcţiei $g(x)=Q(x,f(x))$. Anulăm derivata lui g: $g'(x)=0$ etc.

Metoda III.

Considerăm problema ca o problemă de extrem cu o singură legătură. Fie funcţia ajutătoare:

$F(x,y)=Q(x,y)+\Lambda\left(T-xp_x-yp_y\right).$

Să calculăm derivatele parţiale ale funcţiei F şi să le egalăm cu 0.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\Lambda p_x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}-\Lambda p_y=0\\ xp_x+yp_y=T\end{cases}$$

Pornind de la primele două ecuaţii, deducem:

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial y}} = \frac{p_x}{p_y} \text{ şi } \Lambda = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{p_x} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{p_y}.$$

Deducem că în starea de echilibru raportul productivităţilor marginale este egal cu raportul preţurilor, sau există egalitate între productivităţile marginale împărţite la preţuri.

Diferenţiind funcţiile Q şi T, obţinem:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \text{ şi } dT = p_x dx + p_y dy.$$

Dar în starea de echilibru $\frac{\partial Q}{\partial x} = \Lambda p_x$ şi $\frac{\partial Q}{\partial y} = \Lambda p_y$; deducem astfel

$$dQ = \Lambda(p_x dx + p_y dy) = \Lambda dT.$$

$$dT = 1 \Rightarrow dQ = \Lambda.$$

Λ măsoară astfel producţia suplimentară obţinută atunci când mărim bugetul cu o unitate monetară.

Vom rezolva în continuare explicit problema de extrem, alegând o formă particulară pentru funcţia de producţie. Vom utiliza funcţia de producţie de tip Cobb - Douglas. Astfel, dacă factorii de producţie sunt cantităţile de muncă L (exprimate în ore muncă) şi de capital K (exprimate, de exemplu, în mii de franci), funcţia se scrie:

$Q(K,L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, unde A, α, β sunt parametrii pozitivi.

Ipoteza suplimentară $\alpha + \beta = 1$ este frecventă. În acest caz, funcţia Cobb-Douglas devine:

$Q(K,L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$.

Revenim la sistemul obţinut prin egalarea derivatelor de ordinul I cu 0.

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha A \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha A \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}.$$

Sistemul devine :

$$\begin{cases} \alpha A\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1-\alpha} = \Lambda p_L \\ \alpha A\left(\dfrac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = \Lambda p_K \\ Kp_K + Lp_L = T \end{cases}$$

Vom continua calculele pentru $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} A \dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \Lambda p_L \\ \dfrac{1}{2} A \dfrac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} = \Lambda p_K \\ Kp_K + Lp_L = T \end{cases}$$

Ţinând cont de primele două relaţii $\Rightarrow$

$\dfrac{K}{L} = \dfrac{p_L}{p_K} \Rightarrow K = \dfrac{p_L}{p_K} \cdot L$

Atunci, din a treia ecuaţie rezultă $L = \dfrac{T}{2p_L}$, deci $K = \dfrac{T}{2p_K}$. Raportul cantităţilor folosite din fiecare resursă este invers proporţional cu raportul preţurilor resurselor.

$\Lambda = \dfrac{1}{2} \dfrac{A}{\sqrt{KL}}$

Derivatele parţiale de ordinul II ale funcţiei F sunt:

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} = -\dfrac{A}{4} \dfrac{\sqrt{L}}{K\sqrt{K}}$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} = -\dfrac{A}{4} \dfrac{\sqrt{K}}{L\sqrt{L}}$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} = \dfrac{A}{4} \dfrac{1}{\sqrt{LK}}$.

Diferenţiala de ordinul II este:

$$d^2F = -\frac{A}{4} \frac{\sqrt{L}}{K\sqrt{K}} dK^2 + 2\frac{A}{4} \frac{1}{\sqrt{LK}} dKdL - \frac{A}{4} \frac{\sqrt{K}}{L\sqrt{L}} dL^2.$$

Diferențiind legătura $Kp_K + Lp_L = T$, rezultă $p_K dK + p_L dL = 0$, sau $dK = -\frac{p_L}{p_K} dL$. Obținem:

$$d^2F = -\frac{A}{4}\frac{p_L^{\ 2}}{p_K^{\ 2}} dL^2 - \frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{LK}}\frac{p_L}{p_K} dL^2 - \frac{A}{4}\frac{\sqrt{K}}{L\sqrt{L}} dL^2 < 0 \Rightarrow \text{punctul}$$

considerat este punct de maxim.

$$Q_{max} = A \cdot \sqrt{K} \cdot \sqrt{L} = A\sqrt{\frac{T}{2p_K}} \cdot \sqrt{\frac{T}{2p_L}} = A\frac{T}{2\sqrt{p_K p_L}}.$$

Observație.

Problema se poate generaliza în cazul în care sunt utilizați n factori de producție, rezultatele principale obținute rămânând adevărate și în cazul general.

B. Probleme propuse

1. Să se determine extremele următoarelor funcții:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

R. $f_{min} = -1$, pentru x=1, y=1

b) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$

R. $M(x_0, y_0) = M\left(\frac{ce - bf}{2(ac - b^2)}, \frac{af - bc}{2(ac - b^2)}\right)$, dacă $ac - b^2 \neq 0$, și avem:

i) $ac - b^2 > 0,\ a > 0 \Rightarrow M$ este punct de minim

ii) $ac - b^2 > 0,\ a < 0 \Rightarrow M$ este punct de maxim

iii) $ac - b^2 < 0 \Rightarrow$ nu există puncte de extrem

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

R. (1,1) şi (-1,-1) puncte de minim

d) $f(x,y) = xy^2e^{x-y}$

R. (-1,2) punct de minim

e) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y);\ (x,y) \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

R. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ punct de minim, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ şi $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ puncte de maxim

f) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} - (x^2 + y^2)$

R. $f_{min}=0$, pentru x=0, y=0

g) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

R. $f_{min} = -\frac{2}{e}$, pentru x=-2, y=0

h) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - -xy - xz$

R. (2,1,7) este punct şa

i) $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$

R. (6,4,10) este punct de maxim

j) $f(x,z,y) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

R. $f_{min} = -\frac{4}{3}$, pentru $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$

k) $f(x,y,z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$

R. $(\alpha, \alpha, \alpha);\ \alpha > 0$ sunt puncte de minim

2. Să se găsească punctele de extrem condiţionat:

a) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ cu legătura $x^2 - y^2 = 1$

R. M(0,1)

b) $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, dacă $x^2 + y^2 = 1$

c) $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, dacă $x^2 + y^2 = 1$

R. $f_{min} = \lambda_1, f_{max} = \lambda_2$, unde $\lambda_1 < \lambda_2$ sunt rădăcinile ecuației: $(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0$

d) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, dacă $x + 2y + 3z = a;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

R. $x = y = z = \dfrac{a}{6}$, $f_{max} = \left(\dfrac{a}{6}\right)^6$

e) $f(x,y,z) = xyz$, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0.$

R. $f_{min} = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$, pentru $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ și $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

f) $f(x,y,z,t) = xyzt$, dacă $x + y + z + t = 4c$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$, $t>0$)

R. $f_{max} = c^4$, în (c,c,c,c)

g) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, dacă $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ $(a > 0)$

R. $\left(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}\right)$ punct de minim

$\left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right)$ punct de maxim

h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, dacă $ax + by + cz = 1$

R. $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2+c^2}, \dfrac{b}{a^2+b^2+c^2}, \dfrac{c}{a^2+b^2+c^2}\right)$ punct de minim, dacă a, b, c nu sunt simultan nule

i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, cu legăturile:

$x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

j) $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^p\ (p > 1)$, dacă $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a\ (a > 0)$

R. $\left(\dfrac{a}{n}, \dfrac{a}{n}, \cdots, \dfrac{a}{n}\right)$ punct de minim

3. Să se arate că dacă $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, atunci $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$.

4. Dintr-un fir de cornier de lungime 4a se construieşte rama unui acvariu paralelipipedic. Să se determine dimensiunile paralelipipedului astfel ca acesta să aibă volum maxim.

R. $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

5. Să se determine aria elipsei de intersecție a cilindrului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cu planul $Ax + By + Cz = 0$

R. $S = \Pi \cdot \frac{A^2 + B^2 + C^2}{C} \cdot ab$

Problema se reduce la a determina extremele funcției $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ cu legăturile:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$$

Aria S va fi $S = \Pi\alpha\beta$, unde α şi β sunt valorile extreme ale funcției F.

6. Vezi problema rezolvată cu aplicație în economie 3.
Pentru $Q=Q_0$ constant (nivelul producției este constant), determinați minimul bugetului T. Puteți lua funcția de producție de tip Cobb - Douglas.

7. Rezolvați problema cu aplicație în economie 3, în cazul funcției Cobb - Douglas generale $\left(Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}; \alpha \in [0,1]\right)$.

4.4. Funcţii implicit definite. Transformări regulate. Dependenţă funcţională.

A. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi derivata parţială mixtă de ordinul II pentru funcţia z(x,y) definită implicit de ecuaţia: $(x+y)e^z - xy - z = 0$, în jurul punctului $(x_0, y_0) = (2,2)$ şi pentru $z_0=0$.

Soluţie.

Să definim $F: IR^3 \to IR$, $F(x,y,z) = (x+y)e^z - xy - z$ şi fie $(x_0, y_0, z_0) = (2,2,0)$. F are derivate parţiale de ordinul I continue (chiar de orice ordin), date prin formulele:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^z - y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^z - x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = (x+y)e^z - 1.$$

În mod evident $F(x_0, y_0, z_0) = 4e^0 - 4 - 0 = 0$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(2,2,0) = 3 \neq 0.$

Suntem atunci în condiţiile de aplicabilitate a teoremei funcţiilor implicite şi deducem existenţa unei unice funcţii φ definite pe o vecinătate V_0 a punctului $(2,2)$, cu valori într-o vecinătate U_0 a punctului 0 astfel încât să fie îndeplinite condiţiile:

1) $\varphi(2,2) = 0$
2) $F(x, y, \varphi(x,y)) = 0, \ (\forall)(x,y) \in V_0$
3) φ are derivate parţiale de ordinul I continue, de orice ordin (ca şi funcţia F).

Vom folosi notaţia $\varphi(x,y) = z(x,y)$. Derivând parţial relaţia 2), obţinem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = \frac{e^{z(x,y)} - y}{(x+y)e^{z(x,y)} - 1} = \frac{e^z - y}{(x+y)e^z - 1} \text{ şi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = \frac{e^z - x}{(x+y)e^z - 1}$$

Dacă derivăm parţial în raport cu x a doua relaţie, obţinem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{\left(e^z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - 1\right)\left[(x+y)e^z - 1\right] - \left(e^z + xe^z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + ye^z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)(e^z - x)}{\left[(x+y)e^z - 1\right]^2}$$

În punctul (x_0, y_0), $z(x_0, y_0) = z_0 = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(2,2) = \dfrac{e^0 - 2}{4e^0 - 1} = -\dfrac{1}{3}$ şi

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,2) = \frac{e^0 - 2}{4e^0 - 1} = -\frac{1}{3}.$$

2. Se dă ecuaţia: $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $a \in IR$, $a > 0$. Se cer extremele funcţiei implicite y de x, definită de această ecuaţie, precizând şi punctul (x_0, y_0) respectiv.

Soluţie.

F admite derivate parţiale continue de orice ordin pe IR^2.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3ay \text{ şi}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Fie $(x_0, y_0) \in IR^2$ astfel încât $F(x_0, y_0) = 0$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow (\exists)$ o unică funcţie $\varphi: V_0 \to U_0$ ce satisface condiţiile:

$\varphi(x_0) = y_0$; $F(x_0, \varphi(x_0)) = 0$, $(\forall) x_0 \in V_0$. φ are derivate parţiale continue de orice ordin (V_0, U_0 sunt vecinătăţi ale lui x_0, respectiv y_0). Notăm funcţia φ tot cu y. Punctul x_0 e punct de extrem pentru $y \Rightarrow y'(x_0) = 0$.

$$\text{Dar } y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Dar $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 3x_0^2 - 3ay_0$ şi, ţinând cont şi de condiţia $F(x_0, y_0) = x_0^3 + y_0^3 - 3ax_0y_0 = 0$, deducem:

$y_0 = \frac{x_0^2}{a}$ şi $x_0^3 + \frac{x_0^6}{a^2} - 3x_0^3 = 0$, de unde $x_0^3(x_0^3 - 2a^3) = 0$.

Atunci: a) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

b) $x_0 = a\sqrt[3]{2}$, $y_0 = a\sqrt[3]{4}$.

Dar, în punctul $(x_0, y_0) = (0,0)$ avem $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$ (nu este satisfăcută condiţia $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, deci nu putem aplica teorema funcţiilor implicite pentru $(x_0, y_0) = (0,0)$), deci rămâne să studiem punctul $(x_0, y_0) = (a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$. Pentru aceasta vom calcula $y''(x_0)$.

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right]^2} =$$

$= -\frac{6x \cdot (3y^2 - 3ax) - \ldots}{(3y^2 - \ldots}$

Atunci $y''(x_0) = -\frac{4a\ldots}{\ldots}$

$\Rightarrow$ punctul $x_0 = a\sqrt[3]{\ldots}$

implicit definită de ...

3. Se consideră ...

$\varphi: IR \to IR$ este ...

$a, b, c \in IR$. Fie (x ...

aplicabilitate a ...

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \ldots$

soluţia găsită, să s...

$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - \ldots$

Soluţie.

Fie z(x,y) ...

vecinătatea V_0 a ...

punctului z_0. z este ...

l continue (deoar...

Derivatele parţiale ...

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - a\varphi'(ax + \ldots$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - b\varphi'(ax + \ldots$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - c\varphi'(ax + \ldots$

Atunci:

$$= -\frac{6x\cdot(3y^2-3ax)-(-3a)(3x^2-3ay)}{(3y^2-3ax)^2} = -\frac{2xy^2-ax^2-a^2y}{(y^2-ax)^2}$$

Atunci $y''(x_0) = -\frac{4a^3\sqrt[3]{2}-a^3\sqrt[3]{4}-a^3\sqrt[3]{4}}{(2a^2\sqrt[3]{2}-a^2\sqrt[3]{2})^2} = \frac{a^3(2\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2})}{(a^2\sqrt[3]{2})^2} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ punctul $x_0 = a\sqrt[3]{2}$ este punct de maxim pentru unica funcție implicit definită de ecuația $F(x,y)=0$ în jurul punctului $x_0 = a\sqrt[3]{2}$.

3. Se consideră ecuația $x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$, unde $\varphi: IR \to IR$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă, $a,b,c \in IR$. Fie (x_0,y_0,z_0) un punct ce satisface condițiile de aplicabilitate a teoremei funcțiilor implicite pentru funcția $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\varphi(ax+by+cz)$. Dacă $z=z(x,y)$ este soluția găsită, să se verifice relația:

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

Soluție.

Fie z(x,y) unica soluție a ecuației date, definită pe vecinătatea V_0 a punctului (x_0,y_0) cu valori în vecinătatea U_0 a punctului z_0. z este o funcție ce admite derivate parțiale de ordinul I continue (deoarece φ este derivabilă cu derivata continuă). Derivatele parțiale ale lui F sunt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-a\varphi'(ax+by+cz);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-b\varphi'(ax+by+cz);$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z-c\varphi'(ax+by+cz).$$

Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x-a\varphi'(ax+by+cz)}{2z-c\varphi'(ax+by+cz)}\ \text{şi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2y-b\varphi'(ax+by+cz)}{2z-c\varphi'(ax+by+cz)},\ \text{deci:}$$

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=\frac{(bz-cy)(2x-a\varphi'(u))+(cx-az)(2y-b\varphi'(u))}{2z-c\varphi'(u)}=$$

$$=\frac{2bxz-abz\varphi'(u)-2cxy+acy\varphi'(u)}{2z-c\varphi'(u)}+$$

$$+\frac{2cxy-bcx\varphi'(u)-2azy+abz\varphi'(u)}{2z-c\varphi'(u)}=$$

$$=\frac{2z(bx-ay)+c\varphi'(u)(ay-bx)}{2z-c\varphi'(u)}=\frac{(bx-ay)(2z-c\varphi'(u))}{2z-c\varphi'(u)}=bx-ay,$$

unde am notat $u\overset{\Delta}{=}ax+by+cz$.

4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiilor $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ definite prin sistemul:

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=x+2y-u+v-2\\ F_2(x,y,u,v)=x^3+y^3+u^3-3xyu-3v\end{cases},\quad (x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,1,1,0)$$

Soluţie.

Funcţiile F_1 şi F_2 admit derivate parţiale continue de orice ordin pe întreg domeniul de definiţie.

$F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=1+2-1+0-2=0$

$F_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 1 + 1 + 1 - 3 - 0 = 0$

Derivatele parțiale de ordinul I ale funcțiilor F_1 și F_2 au forma:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} = -1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = 1;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2 - 3yu; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 3y^2 - 3xu;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = 3u^2 - 3xy; \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} = -3.$$

Iacobianul

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3u_0{}^2 - 3x_0 y_0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 3 + 3 = 3 \neq 0.$$

Aplicând teorema funcțiilor implicite pentru sisteme de funcții, deducem că există o unică funcție vectorială φ definită pe o vecinătate V_0 a punctului (x_0,y_0) cu valori într-o vecinătate U_0 a punctului (u_0,v_0), astfel încât:

a) $\varphi(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$

b) $F_1(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ și $F_2(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \ (\forall)(x, y) \in V_0$

c) Componentele φ_1 și φ_2 ale funcției φ au derivate parțiale continue de orice ordin pe V_0. Vom folosi notația $\varphi_1(x, y) = u(x, y)$ și $\varphi_2(x, y) = v(x, y)$. Atunci $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ și derivatele parțiale de ordinul I ale funcțiilor u și v se calculează după formulele:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{(3 - 3u^2 + 3xy)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 - 3yu & -3 \end{vmatrix}}{(3 - 3u^2 + 3xy)} =$$

$$= \frac{3+3x^2-3yu}{3-3u^2+3xy} = \frac{1+x^2-yu}{1-u^2+xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3y^2-3xu & -3 \end{vmatrix}}{(3-3u^2+3xy)} =$$

$$= \frac{6+3y^2-3xu}{3-3u^2+3xy}$$

şi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{(3-3u^2+3xy)} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3u^2-3xy & 3x^2-3yu \end{vmatrix}}{(3-3u^2+3xy)} =$$

$$= \frac{3x^2-3yu+3u^2-3xy}{3-3u^2+3xy} = \frac{x^2+u^2-uy-xy}{1-u^2+xy}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,y)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{(3-3u^2+3xy)} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3u^2-3xy & 3y^2-3xu \end{vmatrix}}{(3-3u^2+3xy)} =$$

$$= \frac{y^2+ux+2u^2-2xy}{1-u^2+xy}$$

5. Să se arate c

$$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{cases}$$

este regulată şi

se găsească ex

unde $F:A \to F(A)$

Soluţie.

Transforn

$u(x,y) = x^2+y^2$,

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \end{vmatrix}$$

deci transforma

oricare ar fi pu

punctului $(x_0, y$

astfel încât F/V

proprietate loc

necesar un cal

Fie $(x_1,y_1),(x_2,$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x_1,y_1) = u \\ v(x_1,y_1) = v \end{cases}$$

Din aceste

$x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

Să determinăm

$(u,v) \in F(A) \Leftrightarrow$

5. Să se arate că transformarea F:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

este regulată şi injectivă pe mulţimea $A = \{(x,y) / x > 0, y > 0\}$. Să se găsească expresia inversei acestei transformări, i.e. $F^{-1} = ?$, unde $F:A \to F(A)$ este bijectivă.

Soluţie.

Transformarea dată F are componentele u şi v, $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = x^2 - y^2$. Jacobianul transformării este

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -8xy \neq 0, (\forall)(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty),$$

deci transformarea este regulată pe mulţimea A. Deducem că oricare ar fi punctul $(x_0, y_0) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$, $(\exists)$ o vecinătate V_0 a punctului (x_0, y_0) şi o vecinătate U_0 a punctului $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$ astfel încât $F/V_0 : V_0 \to U_0$ este o aplicaţie bijectivă. Aceasta este o proprietate locală; pentru a obţine o proprietate globală este necesar un calcul direct.

Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ astfel încât $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2) \\ v(x_1, y_1) = v(x_2, y_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2 \end{cases}.$$

Din aceste egalităţi deducem: $x_1^2 = x_2^2$, $y_1^2 = y_2^2$, adică $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ (toate numerele sunt strict pozitive).

Să determinăm acum mulţimea imagine F(A).

$(u,v) \in F(A) \Leftrightarrow (\exists)(x,y) \in A$ astfel încât $(u,v) = F((x,y)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists) x>0,\ y>0$ astfel încât $u=x^2+y^2,\ v=x^2-y^2$. Deducem că $x^2=\frac{u+v}{2}$ şi $y^2=\frac{u-v}{2}$. Condiţia necesară şi suficientă ca $(u,v)\in F(A)$ este:

$u+v>0,\ u-v>0 \Rightarrow F(A)=\{(u,v)\in IR^2 \,/\, u+v>0, u-v>0\}$.

Transformarea inversă $F^{-1}: F(A)\to A$ are expresia:

$$F^{-1}(u,v)=\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}},\sqrt{\frac{u-v}{2}}\right).$$

6. Fie transformarea F dată prin:

$$\begin{cases} u=e^{x+y} \\ v=x^3 \end{cases}, x,y\in IR.$$

Să se arate că în orice vecinătate a punctului (0,0) transformarea nu este regulată, însă este injectivă.

Soluţie.

Jacobianul transformării este:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x\cdot e^y & e^x\cdot e^y \\ 3x^2 & 0\end{vmatrix}=-3x^2e^x\cdot e^y=0\Leftrightarrow x=0$$

În punctele de forma (0,y) cu $y\in IR$ jacobianul este nul, deci în aceste puncte transformarea nu este regulată.

Fie $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in IR^2$ astfel încât $F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} e^{x_1+y_1}=e^{x_2+y_2} \\ {x_1}^3={x_2}^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+y_1=x_2+y_2 \\ x_1=x_2\end{cases}\Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

Fie $(u,v)\in F(IR^2)$. Atunci există $x,y\in IR$ astfel încât $u=e^{x+y}, v=y^3$. Trebuie impusă condiţia $u>0\Rightarrow x+y=\ln u$, $y=\sqrt[3]{v}$. Deci $x=\ln u-\sqrt[3]{v},\ y=\sqrt[3]{v}$.

Deducem că $F: IR^2 \to (0,\infty)\times IR$ este bijectivă şi inversa lui F are expresia: $F^{-1}(u,v) = \left(\ln u - \sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v}\right)$.

7. Se dau transformările:

$$F_1: \begin{cases} u = x + y \\ v = y + z \\ w = z + x \end{cases} \quad \text{şi} \quad F_2: \begin{cases} \xi = u^2 + v^2 \\ \eta = v^2 + w^2 \\ \delta = w^2 + u^2 \end{cases}, \text{ definite pe } IR^3.$$

Să se găsească transformarea compusă $F_2 o F_1$ şi să se verifice relaţia:

$$\left.\frac{D(\xi,\eta,\delta)}{D(x,y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left.\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \left.\frac{D(\xi,\eta,\delta)}{D(u,v,w)}\right|_{F_1(x_0,y_0,z_0)},$$

$(\forall)(x_0,y_0,z_0) \in IR^3$.

Soluţie.

Transformarea $F_2 o F_1$ are componentele:

$$\begin{cases} \xi(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 = 2y^2 + x^2 + z^2 + 2xy + 2yz \\ \eta(x,y,z) = (y+z)^2 + (z+x)^2 = 2z^2 + x^2 + y^2 + 2xz + 2yz \\ \delta(x,y,z) = (z+x)^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2xy \end{cases}$$

$$\left.\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\left.\frac{D(\xi,\eta,\delta)}{D(u,v,w)}\right|_{(u_0,v_0,w_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial w}\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial w}\\ \frac{\partial\delta}{\partial u} & \frac{\partial\delta}{\partial v} & \frac{\partial\delta}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u_0 & 2v_0 & 0\\ 0 & 2v_0 & 2w_0\\ 2u_0 & 0 & 2w_0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 0\\ 0 & v_0 & w_0\\ 0 & -v_0 & w_0 \end{vmatrix} =$$

$$= 16u_0v_0w_0 = 16(x_0+y_0)(y_0+z_0)(x_0+z_0),$$

unde $(u_0,v_0,w_0) = F_1(x_0,y_0,z_0) = (x_0+y_0, y_0+z_0, z_0+x_0)$

$$\left.\frac{D(\xi,\eta,\delta)}{D(x,y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z}\\ \frac{\partial\delta}{\partial x} & \frac{\partial\delta}{\partial y} & \frac{\partial\delta}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2(x_0+y_0) & 4y_0+2x_0+2z_0 & 2(z_0+y_0)\\ 2(x_0+z_0) & 2(y_0+z_0) & 4z_0+2x_0+2y_0\\ 4x_0+2y_0+2z_0 & 2(y_0+x_0) & 2(z_0+x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= 8\begin{vmatrix} x_0+y_0 & 2y_0+x_0+z_0 & z_0+y_0\\ x_0+z_0 & y_0+z_0 & 2z_0+x_0+y_0\\ 2x_0+y_0+z_0 & y_0+x_0 & z_0+x_0 \end{vmatrix} =$$

$$= 32(x_0+y_0)(y_0+z_0)(x_0+z_0)$$

Deducem astfel egalitatea din enunț.
Transformarea F_2 este regulată pe mulțimea
A= $\{(x,y,z)\in IR^3 / x+y\neq 0,\ x+z\neq 0,\ y+z\neq 0\}$ și atunci, conform relației demonstrate, rezultă că transformarea compusă $F_2 o F_1$ este regulată pe aceeași mulțime A (am folosit faptul că transformarea F_1 este regulată pe IR^3).

8. Transformați ec

coordonate polare:

Soluție.

Vom conside
calcula derivatele p
derivăm parțial în
obținem:

$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi$
$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -$

Derivând parțial în r

$0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - r\sin$
$1 = \frac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi + r\cos$

$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r}c$

Atunci putem scrie:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u(r(x,y),\varphi($

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u(r(x,y),\varphi($

Deducem:

8. Transformați ecuația lui Laplace, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, trecând la coordonate polare: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Soluție.

Vom considera u ca funcție de noile variabile, r și φ. Vom calcula derivatele parțiale ale lui r și φ în raport cu x și y. Dacă derivăm parțial în raport cu x în relațiile $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, obținem:

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi-r\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi+r\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases},$$ de unde rezultă imediat

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{1}{r}\sin\varphi.$$

Derivând parțial în raport cu y se obține:

$$\begin{cases} 0=\dfrac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi-r\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1=\dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi+r\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}$$ și deducem:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{r}\cos\varphi.$$

Atunci putem scrie:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\big(u(r(x,y),\varphi(x,y))\big)=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \text{și}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\big(u(r(x,y),\varphi(x,y))\big)=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Deducem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=$$

$$=\cos^2\varphi\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}+$$

$$+\frac{1}{r^2}\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Dar $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=-\sin\varphi\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{1}{r}\sin^2\varphi$ şi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}\sin\varphi\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\left(-\frac{1}{r}\cos\varphi\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=\frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=$$

$$=\sin^2\varphi\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial y}+\frac{1}{r^2}\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+$$

$$+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Dar $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=-\cos\varphi\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{1}{r}\cos^2\varphi$ şi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^2}\cos\varphi\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Făcând înlocuirile şi însumând, obţinem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$ deci ecuaţia devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$$

9. Fie funcţiile:

$f(x,y,z)=x+y+z,\ g(x,y,z)=x-y+z,\ h(x,y,z)=4(xy+yz);$

$(x,y,z)\in IR^3$. Să se arate că:

a) f, g, h nu sunt independente în nici un punct din IR^3.

b) h depinde de f şi g pe IR^3.

Soluţie.

$$\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4y & 4(x+z) & 4y\end{vmatrix}=0,\ (\forall)(x,y,z)\in IR^3$$

(are două coloane egale).

Deducem că funcţiile f, g, h nu sunt independente în nici un punct din IR^3.

Să considerăm matricea formată din derivatele parţiale ale funcţiilor f şi g. Aceasta este $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ şi are în mod evident rangul 2 $\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0\right)$. Rezultă că funcţiile f şi g sunt independente în orice punct din IR^3.

Din faptul că $\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}=0,\ (\forall)(x,y,z)\in IR^3$ rezultă că pentru orice punct $(x_0,y_0,z_0)\in IR^3$ există o vecinătate V_0 a acestui punct şi o funcţie Ψ astfel încât:

$h(x,y,z)=\Psi(f(x,y,z),g(x,y,z)),\ (\forall)(x,y,z)\in V_0$.

Această proprietate este locală. Rezultă însă imediat (făcând o simplă verificare) că $h(x,y,z)=f^2(x,y,z)-g^2(x,y,z)$, $(\forall)(x,y,z)\in IR^3$.

10. Să se arate că funcțiile $f(x,y)=x^2+4y^2, g(x,y)=\sin(x+2y)$, $h(x,y)=x-2y$, definite pe IR^2 sunt în dependență funcțională pe mulțimea $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}\right]\times\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}\right)$. Să se găsească legătura dintre ele.

Soluție.

Matricea formată cu derivatele parțiale ale funcțiilor f, g, h este:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 8y\\ \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y)\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\frac{D(g,h)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\cos(x+2y) & 2\cos(x+2y)\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4\cos(x+2y)$$

$$\frac{D(g,h)}{D(x,y)}=0\Leftrightarrow\cos(x+2y)=0\Leftrightarrow x+2y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Dar $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}\right]$, $y\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}\right]\Rightarrow x+2y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{8}\right)$. Deci $x+2y$ nu poate fi de forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pentru nici o valoare $k\in Z$; rezultă:

$$\frac{D(g,h)}{D(x,y)}\neq 0,\ (\forall)\ (x,y)\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}\right]\times\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{8}\right].$$

Deducem că g şi h sunt independente în orice punct din mulţimea dată, rang A=2, şi f depinde de g şi h. Dependenţa este chiar globală, dacă observăm că $f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\arcsin^2 g(x,y)+h^2(x,y)\right]$.

11. Să se determine funcţia derivabilă f astfel ca funcţiile: $u(x,y)=f(x+y)$ şi $v(x,y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ să fie dependente. Care este relaţia dintre u şi v?

Soluţie.

Pentru ca u şi v să fie dependente (pe IR^2) este necesar ca $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=0.$

Dar $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f'(x+y) & f'(x+y)\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{f'(x)\left[1-f(x)f(y)\right]+f'(x)f(y)\left(f(x)+f(y)\right)}{\left[1-f(x)f(y)\right]^2}=\frac{f'(x)\left(1+f^2(y)\right)}{\left[1-f(x)f(y)\right]^2}$$ şi

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{f'(y)\left(1+f^2(x)\right)}{\left[1-f(x)f(y)\right]^2}$. Rezultă:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}f'(x+y) & f'(x+y)\\ \frac{f'(x)\left(1+f^2(y)\right)}{\left[1-f(x)f(y)\right]^2} & \frac{f'(y)\left(1+f^2(x)\right)}{\left[1-f(x)f(y)\right]^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{f'(x+y)}{\left[1-f(x)f(y)\right]^2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ f'(x)\left(1+f^2(y)\right) & f'(y)\left(1+f^2(x)\right)\end{vmatrix}=0,\ (\forall)x,y\in IR^2.$$

Presupunem că derivata lui f nu se anulează în nici un punct din IR^2. Atunci, trebuie ca:

$$f'(x)\left(1+f^2(y)\right)=f'(y)\left(1+f^2(x)\right)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=\frac{f'(y)}{1+f^2(y)},\ (\forall)\ (x,y)\in IR^2.$$

Aşadar, funcţia $g: IR \to IR$, $g(x)=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ este constantă.

Atunci, există o constantă C_1, astfel încât $g(x)=C_1$. Integrând, obţinem: $\operatorname{arctg} f(x)=C_1x+C_2$, $C_2\in IR$. Deci, $f(x)=\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$.

Pentru a găsi relaţia dintre u şi v, scriem:

$$v(x,y)=\frac{\operatorname{tg}(C_1x+C_2)+\operatorname{tg}(C_1y+C_2)}{1-\operatorname{tg}(C_1x+C_2)\operatorname{tg}(C_1y+C_2)}=\operatorname{tg}(C_1x+C_1y+2C_2)=$$

$$=\operatorname{tg}\left[\left(C_1(x+y)+C_2\right)+C_2\right]=\frac{\operatorname{tg}\left[C_1(x+y)+C_2\right]+\operatorname{tg}C_2}{1-\operatorname{tg}\left[C_1(x+y)+C_2\right]\cdot\operatorname{tg}C_2}=\frac{u+\operatorname{tg}C_2}{1-u\operatorname{tg}C_2}$$

Relaţia dintre u şi v este aşadar:

$$v=\frac{u+\operatorname{tg}C_2}{1-u\operatorname{tg}C_2}$$

B. Probleme propuse

1. Calculaţi $\dfrac{dy}{dx}$ şi $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ pentru $y(x)$ definit implicit de ecuaţia $\left(x^2+y^2\right)^3-2\left(x^2+y^2\right)+1=0$, în jurul punctului $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

R. $\dfrac{dy(x_0)}{dx}=-\dfrac{x_0}{y_0}=-1$

$$\frac{d^2y(x_0)}{dx^2}=-\frac{{y_0}^2+{x_0}^2}{{y_0}^3}=-2\sqrt{2}$$

2. Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ pentru $z(x,y)$ dată de ecuația

$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ în jurul unui punct (x_0, y_0, z_0) care este soluție a ecuației.

R. $$\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{2x_0}{y_0 - 6z_0}$$

$$\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{1 - 4y_0 - z_0}{y_0 - 6z_0}$$

3. Calculați $\frac{dy}{dx}$ și $\frac{d^2y}{dx^2}$ pentru $y(x)$ definit de:

$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$

R. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$$

4. Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, dacă:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

R. $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}$$

5. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ pentru $z(x,y)$ dat de ecuația:

$z^2 - xe^y - ye^z - ze^x = 0$, în jurul punctului $(x_0, y_0) = (0,0)$; $z_0 = 0$.

R. $$\frac{\partial z}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

6. Dacă $y\cdot(x+z)-(y+z)f(z)=0$, unde f este o funcție derivabilă cu derivata continuă, atunci funcția implicită $z(x,y)$ care este dată de ecuația de mai sus verifică ecuația:

$$z(x+z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y(y+z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

7. Fie funcția $z=\varphi(x,y)$, unde y este funcția implicită de variabila x, dată de ecuația: $\psi(x,y)=0$. Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ (φ şi ψ sunt funcții derivabile).

R. $$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}$$

8. Să se arate că funcția $z(x,y)$, definită de ecuația $F(x-az,y-bz)=0$, unde F este o funcție ce admite derivate parțiale continue, satisface ecuația: $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

9. Fie $z(x,y)$ definită de ecuația $y=x\varphi(z)+\psi(z)$; φ şi ψ sunt funcții derivabile. Să se arate că funcția z satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0$$

10. Funcțiile y, z de variabilă x sunt definite de sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0\\ x^2+2y^2+3z^2=4\end{cases},\quad (x_0,y_0,z_0)=(1,0,1).$$

Calculați $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^2z}{dx^2}$.

11. a) Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ ş

$z=cv$, $c\in IR$.

b) Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$

c) Calculați dz, c

R. a) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(v+u$

c) $dz=\frac{1}{2e^{2u}}[e^u$

12. Funcțiile z şi u de

$$\begin{cases}x+y+z+u-1=0\\ x^2+y^2+z^2+u^2-1=\end{cases}$$

Să se calculeze deriv
u.

R. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-u}{u-z}$; ∂

13. Să se calculeze c
u, v date de sistemul:

$$\begin{cases}xy-2y^2+yu+x+y\\ \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)+\ln(u^2+v^2)\end{cases}$$

în jurul punctului $(x_0,y$

11. a) Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, dacă $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$, $c \in \mathrm{IR}$.

b) Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, dacă $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

c) Calculați dz, dacă $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $y = u \cdot v$.

R. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\sin v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(v + u)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(v - u)$

c) $dz = \frac{1}{2e^{2u}}\left[e^{u-v}(v+u)dx + e^{u+v}(v-u)dy\right]$

12. Funcțiile z şi u de variabile x şi y sunt definite de:

$$\begin{cases} x + y + z + u - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I pentru funcțiile z şi u.

R. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-u}{u-z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z-u}{u-z}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z-x}{u-z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z-y}{u-z}$

13. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I pentru funcțiile u, v date de sistemul:

$$\begin{cases} xy - 2y^2 + yu + x + y + v = 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(u^2 + v^2\right) = 0 \end{cases}$$

în jurul punctului $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,1,1,0)$.

14. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I, pentru funcțiile u, v definite prin sistemul:

$$\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}\cos\left(\dfrac{v}{y}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{2}}=0 \\ e^{\frac{u}{x}}\sin\left(\dfrac{v}{y}\right)-\dfrac{y}{\sqrt{2}}=0 \end{cases}, \quad \text{dacă } (x_0,y_0,u_0,v_0)=\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right).$$

15. Transformați ecuația coardei vibrante: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(a>0)$ trecând la noile variabile: $\alpha = x-at$, $\beta = x+at$.

R. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=0$

16. Transformați ecuația: $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$ introducând noile variabile: $u=x^2+y^2$, $v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, precum și noua funcție $w=\ln z-(x+y)$, unde $w=w(u,v)$.

R. $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$

17. Transformați ecuația: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, punând $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$, unde $w=w(u,v)$.

R. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$

18. Să se transforme ecuația lui Laplace:

$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, dacă noile variabile α,θ,ρ sunt date de relațiile:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \quad (c \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$\rho>0,\ \theta\in[0,\pi),\ \varphi\in$

19. Să se arate că

$\varphi(y)=\begin{cases} y, & y\in[0,1) \\ y^2, & y\in[1,2 \end{cases}$

mulțimea $[1,4]\times[0,2$

20. Să se arate că

$\begin{cases} u=\sin(x+y) \\ v=y^3 \end{cases}, \ (x,$

$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)\times\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$

21. Se consideră t

$\begin{cases} x=a\rho\cos^2\theta \\ y=b\rho\sin^2\theta \end{cases}; \ \rho\geq$

polare generalizate

a) Să se arate că

b) Determinați mu

$A=\{(\rho,\theta)/\rho\in[0,1$

c) Determinați F^{-1}

$B=\{(x,y)/\sqrt{x}+\sqrt{}$

R. a) $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(\theta,\rho)}\right|=$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \quad \text{(coordonate sferice),} \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$\rho > 0,\ \theta \in [0,\pi),\ \varphi \in [0,2\pi)$.

19. Să se arate că transformarea $u = \varphi(y),\ v = \psi(x)$, unde

$\varphi(y) = \begin{cases} y, & y \in [0,1) \\ y^2, & y \in [1,2] \end{cases}$ şi $\psi(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [1,2) \\ 2^x, & x \in [2,4] \end{cases}$, nu este regulată pe mulţimea $[1,4]\times[0,2]$, dar este injectivă pe această mulţime.

20. Să se arate că transformarea F definită de:

$\begin{cases} u = \sin(x+y) \\ v = y^3 \end{cases}$, $(x,y) \in IR^2$ nu este regulată pe mulţimea $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\times\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, dar este injectivă pe această mulţime.

21. Se consideră transformarea F:

$\begin{cases} x = a\rho\cos^2\theta \\ y = b\rho\sin^2\theta \end{cases}$; $\rho \ge 0,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ a > 0,\ b > 0,\ \alpha > 0$ (coordonate polare generalizate).

a) Să se arate că F este regulată în punctul $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Determinaţi mulţimea F(A), unde

$A = \left\{(\rho,\theta) / \rho \in [0,1],\ \theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

c) Determinaţi $F^{-1}(B)$, unde

$B = \left\{(x,y) / \sqrt{x} + \sqrt{y} \le a,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ a > 0\right\}$, când $a = b,\ \alpha = 4$.

R. a) $\left|\frac{D(x,y)}{D(\theta,\rho)}\right| = \alpha ab\rho\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\alpha-1}\theta$

$$\text{b)}\, F(A) = \left\{ (x, y) \,/\, \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \right\}$$

$$\text{c)}\quad F^{-1}(B) = \left\{ (\rho, \theta) \,/\, \rho \in [0,1],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

22. Să se arate că funcţiile $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ definite pe IR şi cu valori reale sunt independente în $x = 0$, dar nu sunt independente în $x \ne 0$.

Indicaţie:

Se foloseşte metoda reducerii la absurd.

23. Să se arate că funcţiile $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$, $g(x, y) = x - y$ sunt independente în punctul (0,0).

24. Fie funcţiile f, g, h definite pe IR^3, date prin:

$f(x, y, z) = (x + y + z)^2$,

$g(x, y, z) = 2x + y - 2z$,

$h(x, y, z) = 3x^2 - 12xz - 18zy$.

Să se arate că:

a) f, g, h nu sunt independente în punctul (0,0,0).

b) Există o vecinătate a punctului (-1,0,1) pe care g depinde de f şi h.

25. Studiaţi dep

a) $\begin{cases} f(x, y, z) = \frac{z}{x} \\ g(x, y, z) = \frac{y}{} \\ h(x, y, z) = z \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x, y, z) = x \\ g(x, y, z) = x \\ h(x, y, z) = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x, y, z) = z \\ g(x, y, z) = s \\ h(x, y, z) = z \end{cases}$

26. Să se arate

$\begin{cases} f(x, y, z) = x + y \\ g(x, y, z) = x^2 + \\ h(x, y, z) = xy - \end{cases}$

sunt în depe

dependenţa fie

R. h depind

27. Să se dete

$u = f(x + y)$, $v =$

R. $f(x) = C$

25. Studiați dependența sau independența funcțiilor:

a) $\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{z}{x} \\ g(x,y,z) = \dfrac{y-x^2}{x} \\ h(x,y,z) = z - xe^{\frac{y-x^2}{x}} \end{cases}$, în punctele (1,0,0) şi (1,1,0).

b) $\begin{cases} f(x,y,z) = x \\ g(x,y,z) = x \cdot \dfrac{1-y}{x-y} \\ h(x,y,z) = x \cdot \dfrac{1-z}{x-y} \end{cases}$, pe $D = IR^3 \setminus \{(x,y,z) / x-y=0\}$.

c) $\begin{cases} f(x,y,z) = z - \sin y \\ g(x,y,z) = \sin x - \sin y \\ h(x,y,z) = z - 2\sin x + \sin y \end{cases}$, pe IR^3.

26. Să se arate că funcțiile

$\begin{cases} f(x,y,z) = x + y - z \\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ h(x,y,z) = xy - xz - yz \end{cases}$, definite pe IR^3,

sunt în dependență funcțională pe IR^3. Să se cerceteze dependența fiecărei funcții de celelalte două.

R. h depinde de f şi g

27. Să se determine funcția f neconstantă, astfel ca funcțiile: $u = f(x+y)$, $v = f(x)f(y)$ să fie în dependență.

R. $f(x) = Ce^{ax}$; a, C constante reale

28. Să se cerceteze dependența funcțiilor:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2 \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j \end{cases}$$

R. $g = f^2 - 2h$

Compartiment
Redactor: LUN
Pocesare: SIM
MIC
VIO

Compartimentul editorial-publicistic
Redactor: LUMINIȚA FALB
Pocesare: SIMONA BUȘOI
MIOARA GAMULEA
VIOLETA ROGOJAN

ISBN 973 – 9462 – 55 – 3